Elementär gruppteori, v.40

Påstående: *Givet en grupp G med undergruppen H. Definiera en relation R på G genom $a\,R\,b \Leftrightarrow aH = bH$. Då är R en ekvivalensrelation med ekvivalensklasserna givna av sidoklasserna, $[a] = aH$.*

Bevis: (i) För alla $a \in G$ gäller att $aH = aH$, så $a\,R\,a$.

(ii) För alla $a, b \in G$ gäller att $aH = bH \Leftrightarrow bH = aH$, så $a\,R\,b \Leftrightarrow b\,R\,a$.

(iii) För alla $a, b, c \in G$ gäller att $(aH = bH$ och $bH = cH) \Rightarrow aH = cH$, så $a\,R\,b$ och $b\,R\,c$ medför att $a\,R\,c$.

Därmed är R en ekvivalensrelation på G. Vidare gäller för varje $a \in G$ att $[a] = \{b \in G : a\,R\,b\} = \{b \in G : aH = bH\} = aH$, där den sista likheten ges av Lemma 27. □

Ekvivalensklasser

Anmärkning. Vi har tidigare visat att $\{aH : a \in G\}$ utgör en partition av G. Detta gäller alltid för mängden av ekvivalensklasser.

Ekvivalensklasser

Sats. (Algebra A). *Om R är en ekvivalensrelation på mängden X, så utgör ekvivalensklasserna en partition av X. Omvänt, om man har en partition av mängden X, så kan man införa en ekvivalensrelation R vars ekvivalensklasser genererar partitionen.*

Nu inför vi en viktig ekvivalensrelation, kallad G-ekvivalens, på en mängd X:

Ekvivalensklasser

Sats 28. *Låt X vara en mängd och G en undergrupp av gruppen* $\mathrm{Sym}(X)$ *av permutationer på X. Definiera relationen $\sim$ på X genom $x \sim y \Leftrightarrow$ det finns en permutation $g \in G$ sådan att $y = g(x)$. Då är $\sim$ en ekvivalensrelation, som kallas G-ekvivalens på X.*

Bevis: (i) Det neutrala elementet i $\langle G, \circ \rangle$ är $id : X \to X$ given av $id(x) = x$ för alla $x \in X$. Då har vi att $x \sim x$ för alla $x \in X$ och då är $\sim$ reflexiv.

Ekvivalensklasser

(ii) Följande utredning visar att $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow \exists\, g \in G : y = g(x) \\ &\Rightarrow \exists\, g^{-1} \in G : g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = x \\ &\Rightarrow y \sim x\,. \end{aligned}$$

Analogt visas att $y \sim x \Rightarrow x \sim y$. Alltså gäller $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, så $\sim$ är symmetrisk.

(iii) Följande implikationer påvisar transitiviteten,

$$(x \sim y \text{ och } y \sim z) \Rightarrow \exists\, g, h \in G : g(x) = y \text{ och } h(y) = z$$
$$\Rightarrow h \circ g \in G \text{ och } z = (h \circ g)(x)$$
$$\Rightarrow x \sim z\,.$$

54

Därmed är $\sim$ en ekvivalensrelation. $\square$

$\{g(x) : g \in G\}$

Definition. *Ekvivalensklassen* $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ *kallas G-ekvivalensklassen av* x *eller banan av* x.

Således gäller det att X är unionen av disjunkta G-ekvivalensklasser.

Exempel. (Se föreläsningsanteckningar).

Definition. *Antag att* $\langle G, \circ \rangle$ *är en grupp av permutationer på en mängd* X *och att* $g \in G$. *Då kallas mängden*

$$X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$$

fixpunktmängden för g *i* X. *För givet* $x \in X$ *kallas mängden*

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$$

stabilisatorn till x.

Ekvivalensklasser

Sats 29. stab(x) *är en undergrupp till* $\langle G, \circ \rangle$. (För varje $x \in X$)

Bevis: Eftersom $e = id \in$ stab(x) så är stab$(x) \neq \emptyset$. Tag $f, g \in$ stab(x). Då är $f(x) = x$ och $g(x) = x$, varför $x = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x)$, så $g^{-1} \in$ stab(x). Nu gäller $(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x) = x$, så $f \circ g^{-1} \in$ stab(x). Då ger Sats 17 att stab(x) är en undergrupp till $\langle G, \circ \rangle$. $\square$

Varje delgrupp till gruppen $\mathrm{Sym}(X)$ av alla permutationer av en mängd $X \neq \emptyset$ kallas en **permutationsgrupp** eller en **grupp av permutationer**. Låt $|X_g|$ beteckna antalet element i g:s fixpunktmängd X_g och låt $|[x]|$ beteckna antalet element i G-ekvivalensklassen av x. Dessutom må $|\mathrm{stab}(x)|$ beteckna antalet element i stabilisatorn till x.

Sats 30. *Låt $\langle G, \circ \rangle$ vara en ändlig delgrupp av* $\mathrm{Sym}(X)$. *För $x \in X$ gäller då att*

$$|G| = |[x]|\,|\mathrm{stab}(x)|\,.$$

Bevis: Sats 29 ger att stab(x) är en undergrupp till G. Nu har vi att

$$G/\mathrm{stab}(x) = \{g\mathrm{stab}(x) : g \in G\},$$

där $g\mathrm{stab}(x) = \{g \circ h : h \in \mathrm{stab}(x)\}$. Nu ger Sats 23 att Lagrange

$$|G| = |G/\mathrm{stab}(x)|\,|\mathrm{stab}(x)|\,.$$

Vidare gäller det att

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} = \{g(x) : g \in G\}\,.$$

Vi skall visa att det finns en bijektion $\varphi : G/\mathrm{stab}(x) \to [x]$. Definiera därför φ för alla $g \in G$ genom

$$\varphi(g\mathrm{stab}(x)) = g(x)\,.$$

(i) Funktionen φ är väldefinierad, ty om $g\mathrm{stab}(x) = h\mathrm{stab}(x)$ ger Lemma 27 att $g \in h\mathrm{stab}(x)$, dvs. $g = h \circ s$ där $s \in \mathrm{stab}(x)$. Alltså $g(x) = h(s(x)) = h(x)$, ty $s(x) = x$.

(ii) Funktionen φ är injektiv, ty $\varphi(g\mathrm{stab}(x)) = \varphi(h\mathrm{stab}(x)) \Rightarrow g(x) = h(x) \Rightarrow (h^{-1} \circ g)(x) = (h^{-1} \circ h)(x) = x \Rightarrow h^{-1} \circ g \in \mathrm{stab}(x)$. Sätt nu $s = h^{-1} \circ g$. Då är $g = h \circ s$, vilket medför att $g \in h\mathrm{stab}(x)$. Lemma 27 ger då att $h\mathrm{stab}(x) = g\mathrm{stab}(x)$ och därmed är φ injektiv.

(iii) Funktionen φ är surjektiv, ty antag att $y \in [x]$, dvs. $x \sim y$. Då finns det ett $g \in G$ sådant att $y = g(x)$. Alltså har vi att $\varphi(g\mathrm{stab}(x)) = g(x) = y$, så φ är surjektiv.

Därmed är φ en bijektion och $|G/\mathrm{stab}(x)| = |[x]|$. Då har vi att $|G| = |[x]|\,|\mathrm{stab}(x)|$. $\square$

Ekvivalensklasser

Exempel. Låt $X = \{1, 2, ..., 6\}$ och låt gruppen $\langle G, \circ \rangle$ bestå av följande permutationer på X: $e = (1)$, $f_1 = (12)(3456)$, $f_2 = (35)(46)$ och $f_3 = (12)(3654)$. (Se föreläsningsanteckningar).

Ekvivalensklasser

Korollarium 31. *Om $y \in [x]$, så är $|\mathrm{stab}(x)| = |\mathrm{stab}(y)|$.*

Bevis: Då $y \in [x]$, så är $[y] = [x]$. Alltså:

$$|\mathrm{stab}(x)| = |G|/|[x]| = |G|/|[y]| = |\mathrm{stab}(y)|,$$

Sats 30

och korollariet är bevisat. $\square$

Exempel. Vi fortsätter med föregående exempel, se föreläsningsanteckningarna.

Ekvivalensklasser

Låt oss nu **allmänt** beräkna antalet olika G-ekvivalensklasser för en given permutationsgrupp G på en mängd X.

Varje G-ekvivalensklass utgör en delmängd av X vars element inte kan urskiljas under gruppoperationer och följaktligen är antalet G-ekvivalensklasser exakt antalet skiljbara, olika typer av objekt i X.

Antalet olika G-ekvivalensklasser ges av Burnsides sats. (William Burnside 1852-1927).

Ekvivalensklasser

Sats 32. (Burnsides sats). *Låt $\langle G, \circ \rangle$ vara en ändlig delgrupp av* Sym(X). *Låt k beteckna antalet olika G-ekvivalensklasser. Då gäller*

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| . \quad \left(= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \right)$$

Bevis: Låt $n =$ antalet par $(g, x) \in G \times X$ med $g(x) = x$. Då $X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$, får vi att

$$n = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Emedan $\operatorname{stab}(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$, gäller det att

$$n = \sum_{x \in X} |\operatorname{stab}(x)|.$$

Nu får vi med stöd av Korollarium 31 och Sats 30 att

$$\sum_{x \in [y]} |\operatorname{stab}(x)| = |[y]|\,|\operatorname{stab}(y)| = |G|. \qquad (*)$$

Ekvivalensklasser

Alltså om $[y_1], \ldots, [y_k]$ är de k olika G-ekvivalensklasserna, så erhålls att

$$\sum_{g \in G} |X_g| = n = \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)| = \overbrace{\sum_{x \in [y_1]} |\mathrm{stab}(x)|}^{=|G|} + \ldots + \overbrace{\sum_{x \in [y_k]} |\mathrm{stab}(x)|}^{=|G|} \overset{(*)}{=} k\,|G|,$$

där den sista likheten följer med stöd av $(*)$, varför vi erhåller $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$. $\square$

Ekvivalensklasser

Låt en rymdfigur i R^3, t.ex. en kub, vara given och betrakta alla rotationer av rymdfiguren kring olika symmetriaxlar. Mängden av alla sådana rotationer som överför rymdfiguren på sig själv bildar en grupp, dvs. vi får gruppen bestående av rotationssymmetrier av rymdfiguren.

Låt oss betrakta ett exempel i form av en regulär tetraeder i R^3.

Exempel. (Se föreläsningsanteckningar).

Exempel. Antag att vi vill tillverka ID-kort utav plastkvadrater som är markerade med ett 3×3 rutnät på båda sidorna av korten och stansade med två hål, såsom i följande figur: (Se föreläsningsanteckningar)

Emedan det finns 9 lägen och 2 hål, så är antalet sätt att stansa hålen

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \, .$$

Vi kommer att hänvisa till dessa som **konfigurationer**. Notera att man inte kan skilja på alla konfigurationer, ty korten kan roteras och speglas.

Ekvivalensklasser

Den grupp G som opererar här är **diedergruppen** D_n med $n = 4$, som består av symmetrierna av kvadraten.

Vi måste betrakta D_4 opererande på mängden X som består av 36 konfigurationer istället för de fyra hörnen, dvs. vi har 8 permutationer av dessa 36 konfigurationer. Då är antalet G-ekvivalensklasser på X exakt antalet skiljbara olika identitetskort.

Vi använder Burnsides sats. För var och en av de 8 symmetrierna g behöver vi endast beräkna $|X_g|$, dvs. antalet konfigurationer fixerade av g.

Exempelvis då g är rotation med 180 grader har vi fyra fixerade konfigurationer: (Se föreläsningsanteckningar)

Låt oss först börja med att skriva ut de 8 permutationerna: (Se föreläsningsanteckningar).

Ekvivalensklasser

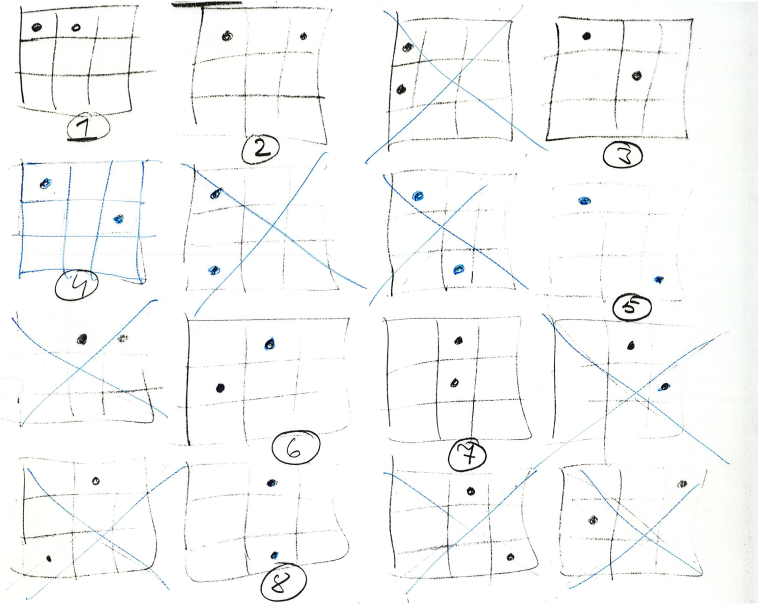
Nu ger Burnsides sats att

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{8}|X_{h_i}| = \frac{1}{8}(36+0+4+0+6+6+6+6) = 64/8 = 8,$$

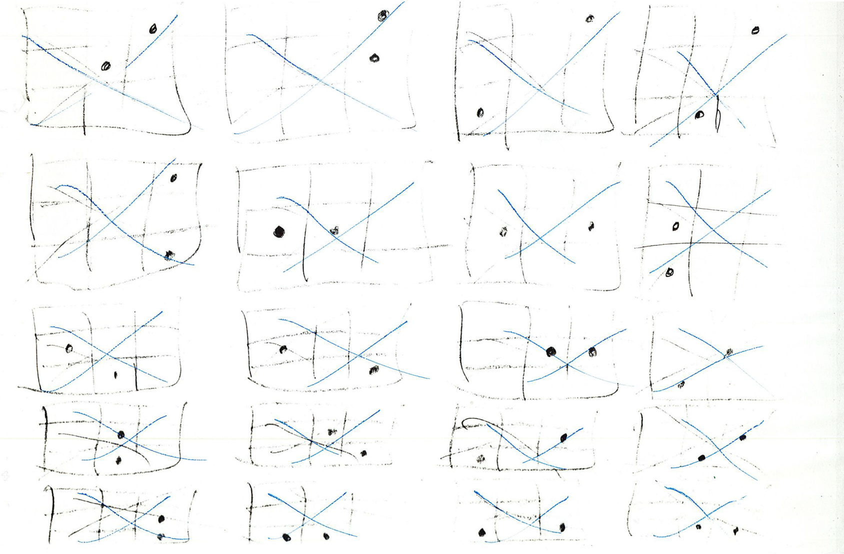
så vi har 8 **olika** ID-kort.

Det är klart att i detta speciella fall skulle det inte vara alltför svårt att bestämma de åtta korten genom försök och misstag. Men i mera allmänna situationer och vid lösning av problem gällande symmetri är Sats 32 ytterst användbar. Därom mera i följande avsnitt.

Ekvivalensklasser



Ekvivalensklasser



Ekvivalensklasser

X mängd. G permutationsgrupp på X. $(G \leq \mathrm{Sym}(X))$

$$\begin{cases} x \sim y \iff \exists\, g \in G : y = g(x). \\ G\text{-ekvivalens} \end{cases}$$

$$[x] = \{ y \in X : x \sim y \} = \{ g(x) : g \in G \}.$$

$X_g = \{ x \in X : g(x) = x \}$, Fixpunktmängden för $g \in G$.

$\mathrm{stab}(x) = \{ g \in G : g(x) = x \}$, Stabilisatorn till x.

Sats 30: $\forall x \in X : |G| = |[x]|\,|\mathrm{stab}(x)|$

Sats 32: (Burnside). Antalet olika G-ekv. klasser $= k$, där

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)|$$