# Sannolikhetsteorins axiom

Givet

(1) $\Omega$ en mängd, *utfallsrummet (perusjoukko, sample space).* Ett element $\omega$ i mängden kallas ibland *ett elementarutfall, en elementarhändelse (alkeistapaus, elementary event)*,

(2) $\mathcal{F}$ en familj av delmängder av utfallsrummet. Dessa delmängder kallas *händelser (tapahtumat, events)*,

(3) **Pr** en *sannolikhet (ett sannolikhetsmått) (todennäköisyys(mitta), probability (measure))* definierat på $\mathcal{F}$.

Trippeln $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Pr})$ är ett *sannolikhetsrum (todennäköisyysavaruus, probability space)* om $\mathcal{F}$ är en $\sigma$-*algebra*, dvs.

(i) $\mathcal{F}$ är sluten under *numrerbar union (numeroituva yhdiste, countable union)* och *numrerbart snitt (numeroituva leikkaus, countable intersection)*

$A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ är sluten under komplementbildning

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

För ett sannolikhetsmått $\mathbf{Pr}$:$\mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ gäller

(iv) $0 = \mathbf{Pr}(\emptyset) \leq \mathbf{Pr}(A) \leq \mathbf{Pr}(\Omega) = 1, \quad A \in \mathcal{F}$

(v) **Pr** är $\sigma$-*additivt*:

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjunkta dvs. $A_i \cap A_j = \emptyset, \;\; i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Pr}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mathbf{Pr}(A_i)$

**Exempel**. Om utfallsrummet $\Omega$ är ändligt väljs $\mathcal{F}$ som potensmängden $\mathcal{P}(\Omega)$, familjen av alla delmängder av $\Omega$. $\mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$.

Om $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$ är sannolikheten **Pr** fullständigt bestämd av dess värde på elementarutfallen $\mathbf{Pr}(\omega_i) = p_i, \;\; i = 1, 2, \ldots n$ där de icke-negativa talen $p_i$ har summan 1.

För $A \subset \Omega$ fås förstås $\mathbf{Pr}(A) = \Sigma_{\omega_i \in A} \; p_i$.

Ofta är sannolikhetsmodellen *symmetrisk* vilket betyder att alla elementarutfallen har samma sannolikhet $\frac{1}{n}$. Sannolikheten för händelsen $A$ är då antalet element i $A$ dividerat med totalantalet element $n$.

Om $\Omega$ är en *numrerbart* oändlig mängd, kan vi också definiera **Pr** utgående från elementarsannolikheter $\mathbf{Pr}(\omega_i)$.

**Exempel.** $\Omega = \{$ utfallet vid fem kast med en tärning $\}$.
$\mid \Omega \mid \; = 6^5 = 7776$, $\mathcal{P}(\Omega) = 2^{7776}$

**Definition.** En *stokastisk variabel (satunnaismuuttuja, random variable)* $X$

$$X : \Omega \to \Re$$

är en funktion med egenskapen att

$$X^{-1}(a, b] \equiv \{\omega \mid a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F}$$

för alla $a, b$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. $X$ är alltså en funktion *mätbar (mitallinen, measurable)* med avseende på $\mathcal{F}$.

Med andra ord tillordnar $X$ ett numeriskt värde till varje utfall $\omega$. T. ex. $X(\omega) =$ maximala utfallet vid fem tärningskast.

Observera att mätbarheten betyder att mängden $\{\omega \mid a < X(\omega) \leq b\}$ är en händelse och att dess sannolikhet kan beräknas (i princip). Denna sannolikhet betecknas ofta $\mathbf{Pr}\{a < X \leq b\}$.

**Exempel.** $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \mid \omega_i = 0$ eller $1, i = 1, 2, \ldots\} \equiv \{0, 1\}^\infty \equiv 2^{\mathbf{N}}$. I detta fall är $\mathcal{P}(\Omega)$ nog en $\sigma$-algebra men alltför stor för att $\mathbf{Pr}$ skulle kunna definieras på den på ett konsistent sätt.

$\mathcal{F}$ väljs här som *den minsta $\sigma-$algebra som innehåller de ändligt-dimensionella rektangulära cylindermängderna*

$$\{\omega \mid \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \ldots \omega_n = i_n\}$$

($n = 1, 2, \ldots,\ i_1, i_2, \ldots i_n = 0$ eller $1$.)

Vi säger också att dessa ändligt-dimensionella cylindermängder *genererar* $\mathcal{F}$.

De tre avbildningarna $\omega \mapsto \omega_{103}$, $\omega \mapsto \omega_1 + \omega_4 + \omega_{72}^2$ och $\omega \mapsto \limsup \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_n}{n}$ är stokastiska variabler med avseende på $\mathcal{F}$.

Vanligen kallas avbildningen $\omega \mapsto \omega_n$ den *$n$-te koordinatavbildningen* och betecknas $X_n$. Alltså : $X_n(\omega) = \omega_n$.

**Exempel.** $\Omega = \Re^{\mathbf{N}} \equiv \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \mid \omega_i \in \Re, i = 1, 2, \ldots\}$.

$\mathcal{F}$ är igen den $\sigma-$algebra som cylindrarna genererar, dvs. den minsta $\sigma-$algebra som innehåller alla mängder av formen

$$\{\omega \mid \omega_i \in (a_i, b_i],\ \ i = 1, 2, \ldots n\}.$$

Notera att $\mathcal{F}$ innehåller mängden $\{\omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in B\}$ (en tvådimensionell cylindermängd) där $B \subset \Re^2$ är en godtycklig öppen, sluten eller allmännare *Borel*mängd. Motsvarande gäller i alla andra dimensioner. (Borel-$\sigma$-algebran i $\Re^2$ är den minsta $\sigma-$algebra som innehåller alla rektanglar $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.)

Det vanliga tillvägagångssättet då man bygger upp (definierar) en stokastisk process är att först precisera $\mathbf{Pr}$ på rektangulära cylindermängder, bevisa att dessa uppfyller vissa konsistensvillkor. **Kolmogorovs konsistensteorem** (1933), se nedan, garanterar sedan att $\mathbf{Pr}$ kan utvidgas till hela $\sigma$-algebran $\mathcal{F}$.

Då man en gång definierat *en* stokastisk process, kan man mycket väl utnyttja den för att bygga upp nya. Exempel: Antag att vi lyckats definiera följden $X_1, X_2, \ldots$ av stokastiska variabler på ett visst sannolikhetsrum $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$. Då utgör

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

en följd av stokastiska variabler på samma rum.

## Betingade sannolikheter, oberoende

Om $X$ är en stokastisk variabel på $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$, säg, definieras dess *fördelningsfunktion (kertymäfunktio, (cumulative) distribution function)* $F$ genom

$$F(x) = \mathbf{Pr}\{X \leq x\}$$

för alla reella $x$. $F$ är växande, högerkontinuerlig, 0 i -$\infty$ och 1 i $\infty$. (Visa detta!)

Om $X$ är en icke-negativ stokastisk variabel definieras dess *väntevärde (odotusarvo, expectation)* $\mathbf{E}X$ som

$$\mathbf{E}X = \int x dF(x) = \int_{0-}^{\infty} x dF(x)$$

där integralen är en s. k. Stieltjes-integral. Vi har $0 \leq \mathbf{E}X \leq \infty$.

Material från Hyltén-Cavallius och Sandgren utdelas (ss. 260-275).

Om $\int |x| dF(x)$ är konvergent definierar vi $\mathbf{E}X$ medelst formeln ovan också för stokastiska variabler som kan byta tecken. I detta fall är dock väntevärdet alltid ändligt. - Om funktionen $F$ är deriverbar med derivatan $f$, *täthetsfunktionen (tiheysfunktio, density function)*, kan $\mathbf{E}X$ beräknas genom den bekanta formeln

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Beteckna med $\sigma(X)$ den minsta under-$\sigma$-algebra av $\mathcal{F}$ som innehåller alla händelser av formen $\{\omega \mid a < X(\omega) \leq b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. $\sigma(X)$ kallas den av $X$ genererade $\sigma$-algebran, den består av de händelser om vilka vi vet om de inträffat eller ej precis då $X(\omega)$ är känd.

$\mathcal{F}$ i exemplet ovan där $\Omega = \Re^{\mathbf{N}}$ kunde skrivas $\sigma(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ där $X_i$ är den $i$te koordinatavbildningen.

Antag att $Y$ är en annan stokastisk variabel på $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$. Med *betingade väntevärdet (ehdollinen odotusarvo, conditional expectation)* av $Y$ givet $X$, betecknat $\mathbf{E}\{Y|X\}$ avses den bästa $\sigma(X)$-mätbara approximationen till $Y$. Mera precist kräver vi att $\mathbf{E}\{Y|X\}$ är en *funktion*, en stokastisk variabel med avseende på sannolikhetsrummet $(\Omega,\ \sigma(X),\ \mathbf{Pr})$, sådan att

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}\{Y|X\}1_A) = \mathbf{E}(Y1_A), \ \ A \in \sigma(X).$$

Här betecknar $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ *indikatorfunktionen* för mängden $A$: $1_A(\omega) = 1$ om $\omega \in A$, $1_A(\omega) = 0$ om $\omega \notin A$.

Funktionen $\mathbf{E}\{Y|X\}$ är inte helt entydigt bestämd, den är bestämd *nästan säkert, n. s. (melkein varmasti, m. v.; almost surely, a. s.)* dvs. sånär som på en mängd med $\mathbf{Pr}$-måttet 0.

Vi definierar $\mathbf{Pr}\{A|X\} = \mathbf{E}\{1_A|X\}$.

Denna definition på betingat väntevärde sammanfaller, lämpligt tolkad, med den i elementär sannolikhetsteori brukade definitionen. - Definitionen av betingat väntevärde $\mathbf{E}\{Y|\ \mathcal{G}\ \}$ med avseende på en godtycklig under-$\sigma$-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ kan formuleras nästan ord för ord lika som definitionen ovan, ersätt bara $\sigma(X)$ med $\mathcal{G}$.

Vi säger $X$ och $Y$ är *oberoende (riippumattomat, independent)* om

$$\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A)\mathbf{Pr}(B), \ \ A \in \sigma(X), B \in \sigma(Y).$$

Vi noterar att i så fall är $\mathbf{E}\{Y|X\}$ konstant, $\mathbf{E}\{Y|X\} = \mathbf{E}Y$.

Utdelas material: Williams s. 88. Egenskaper hos betingade väntevärden.

Hänvisning: Taylor-Karlin, Ch. 2. "Hur man räknar med betingade sannolikheter och betingade tätheter."

## Kolmogorovs konsistensteorem

Låt $T$ vara en indexmängd ("tider", i vår kurs vanligen ickenegativa heltalen, ickenegativa reella talen, möjligen också hela heltalsmängden resp. hela $\Re$). Antag att det för varje positivt heltal $n$ och varje $n$-tupel $t_1, t_2, \ldots t_n$ i $T$ ges en funktion $F_{t_1,t_2,\ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) : \Re^n \to [0,1]$, *de ändligtdimensionella fördelningsfunktionerna* som uppfyller

(a) $0 \leq F_{t_1,t_2,\dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_n) \leq 1$

(b) $F_{t_1,t_2,\dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$ växande, högerkontinuerlig i alla argument

(c) $F_{t_1,t_2,\dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_n) \to 1$ då alla $x_i \to \infty$, $\to 0$ då något $x_i \to -\infty$

(d) $F_{t_1,t_2,\dots t_i \dots t_j \dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_i \dots x_j \dots x_n) = F_{t_1,t_2,\dots t_j \dots t_i \dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_j \dots x_i \dots x_n)$

(e) (*konsistensvillkoren*) $F_{t_1,t_2,\dots t_{n-1},t_n}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n) \to F_{t_1,t_2,\dots t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ då $x_n \to \infty$.

Då existerar ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Pr})$ och stokastiska variabler $X_t, t \in T$ definierade på detta med egenskapen att, för alla $n$ och alla val av $t_1, t_2, \dots t_n$ är den $n$-dimensionella fördelningsfunktionen för $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_n})$ $F_{t_1,t_2,\dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$, dvs.

$$\mathbf{Pr}\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots X_{t_n} \leq x_n\} = F_{t_1,t_2,\dots t_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Obs! Att slå fast de ändligtdimensionella fördelningsfunktionerna är precis detsamma som att bestämma sannolikhetsmåttet på de ändligtdimensionella rektangulära cylindermängderna!

Utdelas material: Hjorth ss. 7-8.

**Exempel.** Betrakta $\Omega = 2^{\mathbf{N}}$ med den av de ändligtdimensionella rektangulära cylindrarna genererade $\sigma$-algebran. Om vi slår fast att sannolikheten för händelsen

$$\{\omega \mid \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \dots \omega_n = i_n\}$$

är $2^{-n}$ för alla de $2^n$ möjliga valen av vektorn $(i_1, i_2, \dots i_n)$, fås en familj av fördelningsfunktioner som uppfyller villkoren i satsen.

Koordinatavbildningarna $X_1, X_2, \dots$ bildar en följd av parvis oberoende binära stokastiska variabler. $\mathbf{Pr}\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}$.

Låt $Y$ vara $\sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$. $Y$ är en stokastisk variabel på samma sannolikhetsrum.

# Markovkedjor

Låt $E$ vara en numrerbar (ändlig eller oändlig) mängd. $E$ kommer att bli *tillståndsrummet (tila-avaruus, state space)* för vår stokastiska process.

Utfallsrummet $\Omega$ låter vi vara $E^{\mathbf{N}} \equiv \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \omega_i \in E, i = 1, 2, \dots\}$.

$\mathcal{F}$ är igen $\sigma$-algebran genererad av de ändligtdimensionella cylindermängderna.

Om $\mathbf{Pr}$ på $\mathcal{F}$ är sådant att

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, X_0\} = \mathbf{Pr}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n\}$$

för alla $n$ och alla val av *tillståndet* $i_{n+1} \in E$, kallas $X_0, X_1, X_2, \ldots$ en *Markovkedja (Markovin ketju, Markov chain)* på $E$.

Villkoret kan också skrivas

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} = \mathbf{Pr}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$$

för alla val av $i$'n i $E$ (med $\mathbf{Pr}\{X_n = i_n\} > 0$).

Fördelningen för $X_{n+1}$ kan alltså vara beroende av de föregående tillstånden (processens *historia*), men bara genom $X_n$. *Hur* vi kommit till tillståndet $X_n$ påverkar däremot inte sannolikhetsfördelningen för $X_{n+1}$.

Allmännare Markovkedjor kan också undersökas, t. ex. sådana med $E = \Re, \Re^2, \ldots$. Vi skall senare behandla Markovkedjor i kontinuerlig tid.

Om dessutom

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \mathbf{Pr}\{X_1 = j | X_0 = i\}, \ \ i, j \in E$$

för alla $n$ sägs Markovkedjan $X$ vara *tidshomogen (aikahomogeeninen (ajan suhteen homogeeninen), time homogeneous).*

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \equiv P_{ij}^{n,n+1}$$

är *övergångssannolikheten (siirtymätodennäköisyys, transition probability)* vid tiden $n$. I det tidshomogena fallet skriver vi

$$P_{ij} = \mathbf{Pr}\{X_1 = j | X_0 = i\}, \ \ i, j \in E.$$

$P$ kallas *övergångs(sannolikhets)matrisen (siirtymä(todennäköisyys)matriisi, transition (probability) matrix)*, ibland för tydlighetens skull *ett-stegs (yhden askeleen, one-step)* övergångsmatrisen. Tidshomogena Markovkedjor betecknas också i litteraturen som kedjor med *stationära* övergångssannolikheter.

Om $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ har vi

$$P = (P_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

$P$ är en s. k. *stokastisk matris* vilket betyder att

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \ \ i, j \in E, \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \ \ i \in E$$

(Om *kolonn*summorna också är 1 kallas matrisen *dubbelt stokastisk.*)

**Teorem.** *En tidshomogen Markovkedja $X_0, X_1, \ldots$ är fullständigt bestämd av sin begynnelsefördelning (fördelningen $\mathcal{L}(X_0)$ för $X_0$) och sin övergångsmatris $P$. Mera exakt uttryckt innebär detta att sannolikhetsmåttet på $\sigma(X_0, X_1, X_2 \ldots)$ är entydigt bestämt av $\mathcal{L}(X_0)$.*

Bevisskiss: Enligt Kolmogorovs konsistensteorem räcker det att på ett konsistent sätt specificera de ändligtdimensionella fördelningarna. Man kan visa att villkoren i konsistensteoremet är uppfyllda om vi slår fast att sannolikheten för händelsen

$$\{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \mid \omega_0 = i_0, \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \ldots \omega_n = i_n\}$$

är $q_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$, för alla val av $n$ och element $i_0, i_1, \ldots i_n \in E$ där vektorn $q = (q_i)$ står för begynnelsefördelningen. •

Anm. Om tillståndsrummet $E$ är ickenumrerbart, $\Re^2$, säg, kan övergångssannolikheten från $x$ till varje enskilt tillstånd vara 0. I stället för matrisen $P$ definierar vi då en *övergångs(sannolikhets)kärna (siirtymäydin, transition kernel)*

$$P(x, A) = \mathbf{Pr}\{X_1 \in A | X_0 = x\}$$

där $x \in E$ och $A$ är en Borelmängd i $E$.

## Vad vill vi veta?

Vilka tillstånd kan nås från ett givet starttillstånd? Vilka tillstånd besöks "ofta"? I vilken mening är processen stabil? Vad händer om $P$ modifieras en aning? Tillämpningar?

Allmänt taget är man intresserad av att känna till kedjans asymptotiska beteende. Vad händer efter en lång tid? En annan klass av frågeställningar är absorptionsproblem. Vad är sannolikheten för att processen når tillståndet 20 innan den besökt 14? Vad är sannolikheten för att processen överhuvudtaget når tillståndet 0? Den sistnämnda frågan är speciellt aktuell i samband med hasardspels- och försäkringsmodeller, att beräkna konkurs- eller *ruinsannolikheter (rauniotodennäköisyys, ruin probability).*

## Representativa exempel

(1) Oberoende lika fördelade stokastiska variabler, *i. i. d. = independent identically distributed*

Beteckna med $\xi$ en stokastisk variabel som antar värdena $1, 2, 3, \ldots N$ ($N = \infty$ också tänkbart) med sannolikheterna $a_1, a_2, \ldots a_N$ där $a$'na är icke-negativa med $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$.

Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots$ vara oberoende observationer av denna variabel:

$$\mathbf{Pr}\{\xi_n = i\} = a_i \quad \mathbf{Pr}\{\xi_m = i, \xi_n = j\} = a_i a_j \ \ (m \neq n).$$

Om vi definierar $X_0 = 1, X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_2, \ldots$ så är $X_0, X_1, X_2 \ldots$ en Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1, 2, 3, \ldots N\}$. I övergångsmatrisen $P$ är elementet $p_{ij} = a_j$.

(2) *Slumpvandring* eller *irrfärd (satunnaiskulku, random walk)*

(Jfr. *Graphical Aids for Stochastic Processes GASP* modul B)

Sätt $X_0 = 0, X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_1 + \xi_2$ och allmänt

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Då fås

$$p_{ij} = \mathbf{Pr}\{X_1 = j | X_0 = i\} = \begin{cases} 0 & \text{om } j \leq i \\ \mathbf{Pr}\{\xi_1 = j - i\} = a_{j-i} & \text{om } j > i \end{cases}$$

där $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (och $a_k = 0$ för $k > N$).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Om vi tillåter $\xi$'na att också anta negativa värden, $\mathbf{Pr}\{\xi = -i\} = a_{-i} \geq 0$, så blir $E = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{Z}$ och $p_{ij} = a_{j-i}, \ \ i, j \in E$.

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ldots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ \ldots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ \ldots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ \ldots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \ldots \\ \ldots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ldots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

där elementet $p_{00} = a_0$ ligger "mitt i matrisen".

(3) Klassiska absorptionsproblem

Låt $E$ vara heltalsmängden $\{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}$ (där det i vissa problem kan vara ändamålsenligt att tillåta $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$.) Antag att vi har

$$p_{ij} = \begin{cases} r_i & \text{om } j = i \\ p_i & \text{om } j = i + 1 \ (0 \text{ om } i = b) \\ q_i & \text{om } j = i - 1 \ (0 \text{ om } i = a) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

med $r_i + p_i + q_i = 1$ och givetvis $r_i, p_i, q_i \geq 0$.

Om $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ blir

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 \end{pmatrix}.$$

*Hasardspelarens ruin/konkurs (Uhkapelurin tuho, Gambler's ruin)*

Betrakta ett spel med spelarna $A$ och $B$ (banken, kasinot). I varje steg (spelomgång) är sannolikheten för att $A$ vinner $p$ och sannolikheten för att $B$ vinner $q = 1 - p$. Spelomgångarna antas vara oberoende av varandra. Den som vinner får 1 mk (eller vad de nu kan ha som enhet) av motspelaren. Spelet slutar då $A$:s kapital tar slut, $A$ går i konkurs. $B$:s kapital antas vara oändligt stort (en idealiserad matematisk formulering av antagandet att $B$ är väldigt mycket kapitalstarkare än $A$).

Låt $X_n$ beteckna $A$:s kapital efter $n$ omgångar. $X_0$ är $A$:s startkapital. $X_0, X_1, X_2, \ldots$ blir en Markovkedja vars övergångsmatris är tridiagonal som ovan med $a = 0$, $b = \infty$ och $r_0 = 1$, $p_0 = 0$, tillståndet 0 är *absorberande (absorboiva, absorbing)*. Vidare är $r_i = 0$, , $p_i = p$, $q_i = q = 1 - p, i = 1, 2, 3, \ldots$.

Frågor vi ställer oss: Går $A$ i konkurs och i så fall efter hur många spelomgångar (i medeltal)? Kan spelet eventuellt pågå oändligt länge? På vilket sätt inverkar $A$:s startkapital på spelets längd?

*Fylleristens vandring (Drunkard's walk)*

(Jfr. GASP, modul B)

Om $A$:s startkapital är $K$ och $B$:s $L < \infty$ ($B$ antas inte längre vara oändligt rik) blir tillståndsrummet $E = \{0, 1, \ldots K+L-1, K+L\}$. Tillståndet $K+L$ är också absorberande ($B$ går i konkurs), dvs. $r_{K+L} = 1$. För övrigt är $r_i = 0$, , $p_i = p$, $q_i = q = 1 - p$, $i = 1, 2, 3, \ldots, K + L - 1$.

Samma Markovkedja (med $p = q = \frac{1}{2}$) används för att beskriva en fyllerists vandring från krogen.

En mycket berusad kroggäst lämnar krogen. $K$ steg till vänster om krogen ligger det absorberande hemmet (tillståndet 0), medan det $L$ steg till höger om krogen ligger ett likaledes absorberande dike (tillståndet $K + L$). Om vi antar att krogbesökaren tar ett steg till höger eller vänster, *oberoende av de föregående stegen*, vartdera med sannolikheten $\frac{1}{2}$, kan hans vandring beskrivas som en Markovkedja med två absorberande tillstånd på samma sätt som i hasardspelssituationen ovan.

Utdelas material, sidan T14.

Uppgift: Skriv program som kan simulera ovan beskrivna modeller!

*Ehrenfests diffusionsmodell*

$E = \{-a, -a+1, \ldots, 0, \ldots a-1, a\}$, $r_i = 0$ för alla $i$, $p_i = \frac{a-i}{2a}$, $q_i = \frac{a+i}{2a}$.

Modellen är följande: Vi har $2a$ stycken kulor i en behållare som delats i två delar $A$ och $B$, säg. Beteckna med $Y_n$ antalet kulor i $A$ vid tiden $n$, efter det $n$te steget. Antalet kulor i $B$ vid denna tid är följaktligen $2a - Y_n$. Det $n+1$-sta steget går till så att *en kula utväljs slumpmässigt* (ur hela behållaren $A \cup B$). Denna kula *byter sida* , dvs. flyttas till $B$ om den var i $A$ och flyttas till $A$ om den var i $B$.

Sätt $X_n = Y_n - a$.

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ är en Markovkedja. Om $X_n = i$ är sannolikheten att välja en kula i $A$ $\frac{a+i}{2a}$ varför $q_i = p_{i,i-1} = \frac{a+i}{2a}$ och, genom ett analogt resonemang, $p_i = p_{i,i+1} = \frac{a-i}{2a}$.

Slumpvandring i $\mathbf{Z}^d$

Låt $E = \{(i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \text{ heltal } \} = \mathbf{Z}^2$ och låt $\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = (i_1+1, i_2) | X_n = (i_1, i_2)\} = \frac{1}{4}$ och på samma sätt för de tre andra närmaste grannpunkterna till $(i_1, i_2)$ i $\mathbf{Z}^2$. Man brukar ofta definiera $X_0 = (0,0)$.

Den resulterande stokastiska processen är en Markovkedja på $\mathbf{Z}^2$, *den enkla symmetriska slumpvandringen på* $\mathbf{Z}^2$ (startad i origo).

I $\mathbf{Z}^d$ är definitionen helt analog, övergångssannolikheterna är $\frac{1}{2d}$ eftersom varje punkt i det $d$-dimensionella heltalsgittret har $2d$ grannpunkter.

(4) *Autoregressiva (AR) processer*

Låt $\xi$'na vara t. ex. N(0,1)-fördelade (normalfördelade med medelvärdet 0 och variansen 1).

Sätt $X_0 = 0$ och $X_{n+1} = aX_n + \xi_{n+1}$ (där $a$ är ett reellt tal). Den resulterande processen är en autoregressiv process av 1 ordningen, AR(1)-process. Den är samtidigt en Markovkedja på $\Re$. Övergångskärnan beräknas lätt genom att $\mathbf{Pr}\{X_{n+1} \in A | X_n = x\}$ är detsamma som $\mathbf{Pr}\{\xi_{n+1} \in A - x\}$ vilket ju är sannolikheten för att en standard normalfördelad stokastisk variabel ligger i $A - x \equiv \{y - x \mid y \in A\}$.

Om vi definierar

$$X_{n+2} = aX_{n+1} + bX_n + \xi_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

med $a, b \in \Re$ och $X_0 = 0, X_1 = \xi_1$ får vi en andra ordningens AR-process, en AR(2)-process. Lämpligt omformad blir processen en Markovkedja på $\Re^2$:

Definiera först

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_n \end{pmatrix} \in \Re^2.$$

Sedan fås

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y_n + \begin{pmatrix} \xi_{n+2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om $\xi_1, \xi_2, \ldots$ är en i. i. d. följd i $\Re^d$ och $f : \Re^d \to \Re^d$ kan vi bilda

$$X_{n+1} = f(X_n) + \xi_{n+1},$$

en Markovkedja på $\Re^d$.

En modell för populationstäthet ges t. ex. av

$$N_{n+1} = N_n \exp(r - N_n + \xi_{n+1})$$

$(N_0 > 0)$. Om vi kallar $\log(N_n)$ för $X_n$ har vi en reellvärd Markovkedja

$$X_{n+1} = X_n + r - \exp(X_n) + \xi_{n+1}$$

som är ovanstående typ då $f(x) = x + r - e^x$. $N_n$ är nog en Markovkedja på $\Re_+ = (0, \infty)$ men den är inte någon AR-process enligt vår definition.

(5) *Itererade funktionssystem IFS (iteroidut funktiosysteemit, iterated function systems)*

Här är tillståndsrummet vanligen $\Re^2$, i synnerhet i de fall då bilder på datorns bildskärm undersöks.

Ett exempel: Låt $f_1, f_2, f_3 : \Re^2 \to \Re^2$ vara givna funktioner och $a_1, a_2, a_3$ givna positiva tal med summan 1. $X_0$ får vara någon given punkt i $\Re^2$, t. ex. origo.

$$X_{n+1} = \begin{cases} f_1(X_n) & \text{med sannolikheten } a_1 \\ f_2(X_n) & \text{med sannolikheten } a_2 \\ f_3(X_n) & \text{med sannolikheten } a_3 \end{cases}$$

definierar då ett IFS, en speciell typ av Markovkedja på $\Re^2$. För stora $n$ genomlöper $X_n$ ofta en s. k. fraktal figur.

Exempel: *Sierpinskis triangel* genereras av funktionerna

$$f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y), \ \ a_1 = \frac{1}{3}$$

$$f_2(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y), \ \ a_2 = \frac{1}{3}$$

$$f_3(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}), \ \ a_3 = \frac{1}{3}$$

Om det finns bara *en* funktion $f$ $(a_1 = 1)$ blir $X_n$ ett *deterministiskt dynamiskt system.*

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

(6) *Köteori (jonoteoria, theory of queues)*

Vi tänker oss kunder som anländer slumpmässigt till ett betjäningsställe. Kunden blir antingen betjänad genast eller så ställer han sig i kö. *Betjäningstiden (palveluaika, service time)* är också stokastisk i många modeller. I exemplet nedan sättes i varje fall betjäningstiden $= 1$.

Exempel: Låt $\xi_n$ vara en i. i. d. följd av icke-negativa heltaliga stokastiska variabler med fördelningen $a$, $\mathbf{Pr}\{\xi_n = i\} = a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Vi tolkar $\xi_n$ som *antalet kunder som anländer till systemet under den nte tidsperioden.*

Beteckna med $X_n$ köns längd i slutet av den $n$-te tidsperioden.

Då är för $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n = \begin{cases} \xi_n & \text{om } X_n = 0 \text{ eller } 1 \\ X_n - 1 + \xi_n & \text{om } X_n > 1 \end{cases}$$

Tillståndsrummet för Markovkedjan $X_0, X_1, X_2, \ldots$ är $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och

$$p_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{om } i = 0, 1 \\ a_{j-i+1} & \text{om } i > 1, j \geq i - 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vad önskar vi veta? Vi vill veta hur systemet fungerar efter "lång tid". Exempelvis vill vi ha reda

fördelningen för $X_n$ för stora $n$
$\mathbf{E}(X_n)$ för stora $n$
variansen för $X_n$ för stora $n$
systemets overksamhetstid (*idle time*) på lång sikt
*belastningen (kuormitus, load)* på lång sikt.

(7) En *lagermodell (varastomalli, inventory model)*

Se utdelat material T21

En *dammodell (patomalli, dam model)*

Se utdelat material T22

Denna modell analyseras bl. a. för att få reda på hur $X_n$ fluktuerar över lång tid. Är $S$ välvald? Bör kanske dammens kapacitet utökas? Hur ofta leder de olika alternativen till vattenbrist?

(8) En blandningsmodell

$S = \{\text{permutationer av } \{1, 2, 3, \ldots 51, 52\}\}$, $|S| = 52!$

$\alpha, \beta, \gamma$ bijektioner på $S$ ("omordningar av $S$"), t. ex.

$$\alpha : (i_1, i_2, \ldots i_{52} \mapsto (i_{11}, i_{12}, \ldots i_{52}, i_1, \ldots i_{10})$$

$$\beta : (i_1, i_2, \ldots i_{52}) \mapsto (i_1, i_{27}, i_2, i_{28}, i_3, i_{29} \ldots i_{26}, i_{52})$$

Låt $X_0 = (1, 2, 3, \ldots 52)$ och sätt

$$X_{n+1} = \begin{cases} \alpha(X_n) & \text{med sannolikheten } a_1 \\ \beta(X_n) & \text{med sannolikheten } a_2 \\ \gamma(X_n) & \text{med sannolikheten } a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Problem: Kommer kortleken att blandas "fullständigt"? Tar det länge? Finns det någon statistisk stabilitet i det långa loppet?

(9) *Förgreningsprocesser (haarautumisprosessit, branching processes)*

Vi startar med $X_0 \geq 0$ individer. $X_n$ betecknar antalet individer i den $n$te generationen. Varje individ (i den $n$te generationen) har ett slumpmässigt antal ättlingar *oberoende av varandra*. Avkommans (*offspring*) storlek har fördelningen $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Om den $k$te individen i den $n$te generationen har $\xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots X_n)$ ättlingar blir

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \mathbf{Pr}\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i = j\}$$

(om $i > 0$). Tillståndsrummet är $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Tillståndet 0 är absorberande.

Om storleken på avkomman till individerna i den $n$te generationen fortfarande är sinsemellan oberoende, men *fördelningen beror av* $X_n$ talar vi om populations- eller storleksberoende (*population-dependent, size-dependent*) förgreningsprocesser.

## Egenskaper hos Markovkedjor

Till skillnad från vissa av exemplen ovan, återgår vi till fallet med diskret (ändligt eller numrerbart oändligt) tillståndsrum $E$. Markovkedjorna vi behandlar är tidshomogena. Övergångssannolikhetsmatrisen betecknas $P$.

**Teorem.** *$m$-stegs övergångssannolikhetsmatrisen är $P^m$.*

Bevis. Se utdelat material T25.

**Korollarium.** *Om $p_i = \mathbf{Pr}\{X_0 = i\}$, $i \in E$, så*

$$\mathbf{Pr}\{X_m = j\} = (pP^m)_j = \sum_{i \in E} p_i (P^m)_{ij}, \quad j \in E$$

**Definition.** Kedjan är *stationär* om

$$p = pP.$$

Anm. (1) Betrakta $p$ som en radvektor.
(2) $p$ är *invariant* m. a. p. $P$.
(3) I så fall har $X_n$ samma fördelning som begynnelsefördelningen:

$$\mathbf{Pr}\{X_n = i\} = \mathbf{Pr}\{X_0 = i\}$$

för alla $n$ och alla $i$.
(4) $p$ är en *vänsteregenvektor* till $P$. Motsvarande egenvärde är 1.

$P$ opererar också på kolonnvektorer $f = (f_j), j \in E$

$$(Pf)_i = \sum_{j \in E} p_{ij} f_j = \mathbf{E}\{f(X_1) | X_0 = i\}$$

ty

$$\mathbf{E}\{f(X_1) | X_0 = i\} = \sum_{j \in E} f_j \mathbf{Pr}\{X_1 = j | X_0 = i\}.$$

Anm. (1) $P1 = 1$ där 1 står för en kolonnvektorer bestående av ettor
(2) Vektorn 1 är en egenvektor (egentlig egenvektor eller högeregenvektor) till $P$. Motsvarande egenvärde är 1.

## Klassificering av tillstånd

**Definition.** Vi definierar relationen $\to$ på $E$ genom

$$i \to j \text{ om och endast om } \exists m : P_{ij}^m > 0$$

Vi säger att "$i$ leder till $j$", "$j$ kan nås från $i$" eller "$j$ är accessibel från $i$".

**Definition.** Relationen $\leftrightarrow$ definieras genom

$$i \leftrightarrow j \text{ om och endast om } i \to j \text{ och } j \to i.$$

Vi säger att $i$ och $j$ *kommunicerar (kommunikoi, communicate)*. Enligt definitionen gäller alltså

$$(i \leftrightarrow j) \Leftrightarrow (\exists m, n : P_{ij}^m, P_{ji}^n > 0).$$

Om $i \leftrightarrow i$ kallas $i$ ett *returtillstånd (paluutila, return state)*. Kommunikationsrelationen $\leftrightarrow$ är en ekvivalensrelation på mängden returtillstånd i $E$.

Bevis: Se utdelade T28.

**Definition.** Kedjan är *irreducibel (jakamaton, irreducible)* om den består av en enda ekvivalensklass m. a. p. $\leftrightarrow$.

Tillståndet $i$ är *absorberande (absorboiva, absorbing)* om $p_{ii} = 1$.

Ekvivalensklassen $C$ är absorberande om $p_{ij} = 0, \; j \notin C$ (vilket är detsamma som $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$.)

Ekvivalensklassen $C$ är däremot icke-absorberande om $p_{ij} > 0$ för något $i \in C$ och något $j \notin C$.

Exempel: Se utdelade T30.

**Definition.** Antag att $i$ är ett returtillstånd. $i$:s *period (jakso, period)* $d(i)$ definieras om

$$d(i) = \text{sgf}\{n \geq 1 \mid P_{ii}^n > 0\} = \text{gcd}\{n \geq 1 \mid P_{ii}^n > 0\}.$$

(sgf = största gemensamma faktorn, gcd = greatest common divisor, syt = suurin yhteinen tekijä) - Om $d(i) = 1$ för alla tillstånd $i \in E$ kallas kedjan *operiodisk (jaksoton, aperiodic)*.

Exempel: Se utdelade T31, T32.

Man kan visa (T32,T33) att $d(i)$ är det *minsta positiva elementet i $B$* där

$$B \equiv \{n_1 - n_2 \mid P_{ii}^{n_1}, P_{ii}^{n_2} > 0\}$$

**Teorem.** *För alla tillräckligt stora $m$ är $P_{ii}^{md(i)} > 0$.*

Bevis. Se utdelade T33, T34.

**Korollarium.** *Om $E$ är ändlig kan $N(i)$ väljas oberoende av $i$, så att*

$$\exists N : m > N \Rightarrow P_{ii}^{md(i)} > 0$$

*Om $E$ är ändlig och kedjan operiodisk och irreducibel så*

$$\exists N : m > N \Rightarrow P_{ij}^{m} > 0, \;\; i, j \in E.$$

Bevis. Se utdelade T34.

**Korollarium.** *Perioden är konstant på varje klass, dvs.*

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow d(i) = d(j).$$

Bevis. Se utdelade T35.

(Utdelade T36 belyser heltalsmängders *täthet (tiheys, density).*)

**Teorem.** *Låt tillståndsrummet $E$ vara ändligt. Antag att Markovkedjan definierad av övergångsmatrisen $P$ är operiodisk och irreducibel. Då existerar*

$$\lim_{n \to \infty} P^n.$$

*Gränsvärdet är en strängt positiv stokastisk matris $\Pi$ med identiska rader*

$$\lim P^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

*där radvektorn $\pi$ är Markovkedjans entydigt bestämda stationära fördelning.*

Bevisskiss i utdelade T37-39.

**Korollarium.** *Om $P$ är irreducibel och periodisk med perioden $d$ så konvergerar*

$$\frac{1}{d}(P^{md} + P^{md+1} + \cdots P^{(m+1)d-1})$$

*mot matrisen $\Pi$, då $m \to \infty$. Det gäller också att (den reducibla) övergångsmatrisen $P^{md}$ konvergerar mot en blockmatris med $d$ block där blocken är stokastiska matriser med identiska rader.*

Anm. För att bevisa teoremet behöver vi visa att

1. gränsvärdet existerar
2. gränsvärdet är positivt
3. gränsmatrisen är stationär, och
4. entydigheten hos den stationära fördelningen.

Utdelas T41-42

## Stopptider

**Definition.** En stokastisk variabel $T : \Omega \to \overline{Z_+} \equiv \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ kallas en *stopptid (pysähdysaika, stopping time)* eller *Markovtid* (m. a. p. Markovkedjan $X$) om, för varje $n = 0, 1, 2, \ldots$ händelsen

$$\{T \leq n\}$$

tillhör $\sigma$-algebran

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots X_n).$$

Med andra ord är det möjligt att avgöra om $T$ är $\leq n$ genom att observera processen $X$ under tiden $0, 1, 2, \ldots n-1, n$.

Utdelas: Williams sid. 219-220.

Ett speciellt slag av stopptider är *träfftiderna (osuma-ajat, hitting times)*: Låt $A$ vara en delmängd av tillståndsrummet $E$. Sätt

$$T = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\} & \text{om } \exists\ n \text{ med } X_n \in A \\ \infty & \text{om } X_n \notin A \text{ för alla } n \geq 0. \end{cases}$$

Anm. (1) Observera att $T = T(\omega)$ är en stokastisk variabel (om vi utvidgar definitionen en aning för att inkludera $\infty$).
(2) Det är viktigt att inte "nonchalera" oändliga värdena!
(3) Vanligaste fallet är att $A$ är en enskild punkt i $E$.

I vissa fall inför man i tillståndsrummet $E$ ett speciellt tillstånd (*gravgården*) $\Delta$ där processen kan absorberas. (Exempelvis i ruinproblemen eller fylleristvandringen kan vi tänka oss att de absorberande tillstånden gemensamt benämns "gravgården" .) I så fall kallas träfftiden

$$T = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid X_n = \Delta\} & \text{om } \exists\ n \text{ med } X_n = \Delta \\ \infty & \text{om } X_n \neq \Delta \text{ för alla } n \geq 0, \end{cases}$$

processens *livstid (elinaika, lifetime)*.

Livstiden är alltså egentligen en *absorptionstid* (första ankomsten till en absorberande klass).

Betrakta sannolikhetsrummet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$.

**Definition.** En *filtration* i $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$ är en växande följd av under-$\sigma-$algebror till $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \mathcal{F}_n \subset \ldots$

Det vanligaste exemplet är den filtration som genereras av en stokastisk process $X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots$ där $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots X_n)$, den *naturliga* filtrationen. Å andra sidan om filtrationen $\mathcal{F}_n$ är genuint större än $\sigma(X_0, \ldots X_n)$ är tolkningen den att man vid tiden $n$ har mer information än vad som observationerna $X_0, \ldots, X_n$ ger.

Om filtrationen $\mathcal{F}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ är given sägs följden $X_0, X_1, X_2, \ldots$ vara *adapterad* till filtrationen om för varje $n$ gäller att $X_n$ är en mätbar m. a. p. $\mathcal{F}_n$ eller med andra ord att $X_n$ är en stokastisk variabel m. a. p. undersannolikhetsrummet ($\Omega$, $\mathcal{F}_n$, $\mathbf{Pr}$:s restriktion till $\mathcal{F}_n$).

Om $T$ i definitionen på stopptid ovan har egenskapen att $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ säger vi att $T$ är en stopptid med avseende på filtrationen $\mathcal{F}_n$.

**Definition.** Låt $T$ vara en stopptid med avseende påfiltrationen $\mathcal{F}_n$. $\mathcal{F}_T$ definieras som familjen av alla de delmängder $A$ av $\Omega$ som har egenskapen att $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ för alla $n$.

Denna familj, som är en $\sigma$-algebra (varför?), består av de händelser som inträffar före (eller samtidigt som) $T$.

Definitionen på Markovkedja $X$ innebär att, för prediktering av framtida värden, all kunskap om processen fram till tiden $n$ kan ersättas med kunskapen om tillståndet $X_n$. Denna egenskap kallas Markovegenskapen. Den kan till exempel uttryckas

$$\mathbf{Pr}\{X_{n+1} \in A | \sigma(X_0, \ldots, X_n)\} = \mathbf{Pr}\{X_{n+1} \in A | X_n\} \text{ n.s.}$$

där $A \subset E$. En Markovkedja i *diskret tid* har också den *starka Markovegenskapen*: Vi får ersätta den deterministiska tiden $n$ med vilken som helst stopptid $T$. Vi har alltså

$\mathbf{Pr}\{X_{T+1} \in A | \mathcal{F}_T\} = \mathbf{Pr}\{X_{T+1} \in A | X_T\}$

där $X_\infty$ sättes lika med $\Delta$.

Anm. I de flesta konkreta situationer försöker man definiera $T$ så att $T < \infty$ n. s.

## Absorptionstider

Vi återgår nu till att betrakta Markovkedjor $X_0, X_1, \ldots$ på tillståndsrum $E$.

**Teorem.** *Antag att tillståndsrummet $E$ är ändligt. Då existerar minst en absorberande klass i $E$. Definiera absorptionstiden $T$ som tidpunkten för den ankomsten till någon av de absorberande klasserna. Vi har att $T$ är ändlig n. s. och till och med $\mathbf{E}(T) < \infty$.*

Den exakta definitionen är alltså

$$T = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in C\} & \text{om } \exists\ n \text{ med } X_n \in C \\ \infty & \text{om } X_n \notin C \text{ för alla } n \geq 0. \end{cases}$$

där $C$ är unionen av de absorberande klasserna.

Bevis. Se utdelade T46-47.

### Förstastegsanalys

Tillämpningarna på konkreta exempel görs ofta via s. k. *first step analysis* eller förstastegsanalys. Resonemanget är intuitivt men skall naturligtvis i sista hand kunna återföras på vårt sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Pr})$. Vi utnyttjar att den probabilistiska struktur som gällde vid starten (tiden 0) är exakt densamma efter ett steg (Markovegenskapen). Det "enda" som hänt är att tiden gått framåt med 1 enhet. Jfr. exemplen!

Utdelas T48-51.

**Definition.** Låt $C$ beteckna unionen av de absorberande klasserna. Antag att $T$ är absorptionstiden. Fördelningen

$$\mathbf{Pr}\{X_T = k | X_0 = i\}, \quad k \in C$$

kallas *träffördelningen (osumajakauma, hitting distribution/entrance distribution* på $C$.

Anm. Om $i \in C$ blir $T = 0$ och $X_T = i$, men om $i \notin C$ så blir $T > 0$ och träffördelningen en icke-trivial fördelning.

Vid denna punkt görs en liten utvikning till

## Martingaler

Låt $\mathcal{F}_n$ vara en filtration på sannolikhetsrummet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$. Vi kallar den av filtrationen genererade $\sigma$- algebran för $\mathcal{F}_\infty$. Givetvis gäller $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$.

**Definition.** En stokastisk process $X_0, X_1, \ldots$ definierad på $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{Pr})$ med filtrationen $\mathcal{F}_n$ kallas en *martingal* (m. a. p. $\mathcal{F}_n$) om

(i) $X$ är adapterad, dvs. $X_n$ är en stokastisk variabel m. a. p. $\mathcal{F}_n$ för alla $n$

(ii) $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ för alla $n$

(iii) $\mathbf{E}\{X_n |\ \mathcal{F}_{n-1}\} = X_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots$

Om (i), (ii) och

(iii') $\mathbf{E}\{X_n |\ \mathcal{F}_{n-1}\} \le X_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots$

gäller kallas processen en *supermartingal.* Om olikheten i (iii') omvänds

$\mathbf{E}\{X_n |\ \mathcal{F}_{n-1}\} \ge X_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots$

är resultatet en *submartingal.*

Anm. Vi kan anta att $X_0 = 0$ ty $X_n - X_0$ är en martingal (resp. sub-, supermartingal) om och endast om $X_n$ är det.

Vi har vidare (enligt inkapslingsegenskapen för betingade väntevärden (*Tower property*))

$\mathbf{E}\{X_n |\ \mathcal{F}_m\} = X_m,\ \ m < n.$

**Exempel** (a) Slumpvandringar på $(\Re, +)$

(b) Slumpvandringar på $(\Re^+, \cdot)$

(c) Ackumulerad information om en stokastisk variabel

Se Williams, sid. 95-96

**Definition.** En process $C_1, C_2, \ldots$ kallas *prediktabel* eller *previsibel* om

$C_n$ är mätbar m. a. p. $\mathcal{F}_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots.$

Om $X$ är en martingal kallas processen $C \bullet X$, definierad genom

$$(C \bullet X)_0 = 0, \quad (C \bullet X)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k (X_k - X_{k-1})$$

*martingaltransformen* av $X$ med $C$.

(Williams 10.7) Låt $X$ vara en martingal. Om $C$ är en positiv, likformigt begränsad prediktabel process så är $C \bullet X$ en martingal.

Antag att $T$ är en stopptid m. a. p. filtrationen $\mathcal{F}_n$, dvs. händelsen $\{T \leq n\}$ tillhör $\mathcal{F}_n$ för varje $n$.

**Definition.** Processen $X^T$, processen $X$ *stoppad (stannad) vid tiden* $T$ , definieras genom

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge n}(\omega) \equiv X_{\min(T(\omega),n)}(\omega), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Williams, s. 99) Om $X$ är en (super)martingal så är $X^T$ en (super)martingal.

**Teorem.** (Doob's Optional Stopping Theorem) *Om $X$ är en supermartingal resp. martingal så gäller*

$$\mathbf{E}(X_T) \leq \mathbf{E}(X_0) \text{ resp. } \mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0)$$

*åtminstone i följande situationer*

*(i) $T$ är begränsad,*

*(ii) $X$ är begränsad och $T$ n. s. ändlig,*

*(iii)* $\mathbf{E}T < \infty$ *och $X_n - X_{n-1}$ är begränsad.*

**Teorem** (Framåt konvergensteorem för martingaler och positiva supermartingaler) *Låt $X$ vara en supermartingal som är begänsad i $\mathcal{L}^1$, dvs.* $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$. *Då existerar gränsvärdet* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *n. s. och är ändligt.*

*Varje ickenegativ supermartingal konvergerar n. s.*

Vi definierar ofta $X_\infty$ som gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} X_n$. $X_\infty$ är mätbar m. a. p. $\mathcal{F}_\infty$.

Vi nämner ännu ett av de viktiga dekompositions- eller sönderdelningsresultaten:

(Williams 12.11) Om $X$ är adapterad med $\mathbf{E}(|X_n|) < \infty$ för alla $n$ så kan $X$ skrivas som summan av $X_0$, en martingal $M$ (som startar i 0) och en prediktabel process $A$ som startar i 0. Denna *Doobska* sönderdelning är väsentligen entydig.

Om $X$ är en submartingal så blir den prediktabla processen $A$ *växande.*

$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}\}$

## Poissonprocesser

Vi övergår nu (tillfälligt) till att betrakta *kontinuerlig* tid i st. f. diskret.

Se Taylor-Karlin kap. 5

**Definition.** En *Poissonprocess* med *intensiteten* $\lambda > 0$ är en heltalsvärd stokastisk process $X_t, t \geq 0$ med följande egenskaper:

(i) För alla val av $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ är tillväxterna eller *inkrementen* $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ parvis oberoende stokastiska variabler,

(ii) för alla $0 \leq s < t$ är den stokastiska variabeln $X_t - X_s$ Poissonfördelad med parametern $\lambda(t-s)$, dvs.

$$\mathbf{Pr}\{X_t - X_s = k\} = \frac{\lambda(t-s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

, (iii) $X_0 = 0$.

Anm. En heltalsvärd process definierad på $\Re^+, \Re, \Re^2, \ldots$ som beskriver antalet punkter (ev. av olika typ) på delmängder av definitionsområdet kallas i allmänhet för *punktprocess (pisteprosessi, point process)*. En punktprocess kan ses som ett slumpmässigt heltalsvärt mått på definitionsmängden. Om vi i Poissonfallet sätter $N((s,t]) = X_t - X_s$ och tolkar detta som antalet punkter i intervallet $(s,t]$ så blir $N$ en additiv mängdfunktion på de halvöppna intervallen. På vanligt sätt kan $N$ utvidgas till ett mått på alla Borelmängder $A \subset \Re^+$. $N(A)$ är helt enkelt antalet punkter i $A$. Observera att $X$ och därmed $N$ varierar med $\omega$; $N$ är därför ett slumpmässigt mått på $\Re^+$.

Poissonprocessen är en submartingal, ty

$\mathbf{E}\{X_t | \mathcal{F}_s\} = X_s + \lambda(t-s)$

för $s < t$, dvs.

$\mathbf{E}\{X_t | \mathcal{F}_s\} \geq X_s, \quad s < t,$

analogin i kontinuerlig tid till submartingalvarianten av (iii) i def. av martingaler ovan. $\mathcal{F}_s$ är naturligtvis $\sigma(X_u, u \leq s)$ i analogi med den "diskreta" definitionen.

Den växande processen $A_t$ i Doobuppdelningen $X = (X_0+)M + A$ blir helt enkelt $\lambda t$. (Varför?)

En *inhomogen* Poissonprocess får vi om vi ersätter parametern $\lambda$ i (ii) ovan med

$$\int_s^t \lambda(u)du$$

där $\lambda(u)$ är en integrabel funktion på $\Re^+$. $\lambda(u)$ representerar en lokal intensitet i punkten $u$. Om $\lambda(u)$ är konstant återfås den homogena processen definierad i början av avsnittet.

Punkterna kan vara av olika slag (t. ex. vita och svarta). Den process som då fås kallas *märkt (merkkinen, marked)*. Märkningen av punkterna sker oberoende av varandra men märkena har alla samma fördelning.

Antag att $Y_1, Y_2, \ldots$ är en i. i. d. följd av (reella) stokastiska variabler. Processen

$$Z_t = \begin{cases} 0 & \text{om } X_t = 0 \\ \sum_{k=1}^{X_t} Y_k & \text{annars} \end{cases}$$

är en *sammansatt (yhdistetty, compound)* Poissonprocess. Processen är ett mycket viktigt hjälpmedel i försäkringsmatematiken.

## Absorptionskalkyler (forts.)

Vi återgår nu till tidshomogena Markovkedjor $X_n$ i diskret tid. Tillståndsrummet $E$ antas vara ändligt, med $N$ tillstånd. Kedjans övergångsmatris kallas $P$. Vi antar att inte alla element tillhör de absorberande klasserna $C$ utan $r$ av de $N$ elementen ligger i $C^c$.

Efter ev. omnumrering av tillstånden kan $P$ skrivas i blockmatrisform där de $r$ första raderna beskriver övergångarna från de icke-absorberande tillstånden medan de $N-r$ sista raderna anger övergångssannolikheterna inom de absorberande klasserna $C$:

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}$$

där $Q$ är en $r \times r$ substokastisk matris, $R$ en $r \times N - r$ substokastisk matris och $\tilde{P}$ en stokastisk matris. Inget av blocken förutsätts vara irreducibelt.

Utdelas T53-54.

Om $T$ igen betecknar absorptionstiden så ger

$$u_{ik} \equiv \mathbf{Pr}\{X_T = k | X_0 = i\}, \quad k \in C, i \in E$$

den s. k. träffördelningen av $C$ vid start från $i$.

Förstastegsanalys ger

$$u_{ik} = p_{ik} + \sum_{j \notin C} p_{ij} u_{jk} = r_{ik} + \sum_{j \notin C} q_{ij} u_{jk}, \quad k \in C, i \notin C$$

och

$$u_{ik} = \delta_{ik}, \quad k \in C, i \in C.$$

Organiserar vi räkningarna i matrisform där $U$ är en $r \times N - r$ matris av $u_{ik}, i \notin C, k \in C$ så fås

$$U = R + QU \quad \text{dvs.} \quad U = (I - Q)^{-1} R.$$

Matrisen $(I-Q)^{-1}$ (där $I$ förstås är en $r \times r$ identitetsmatris) kallas *fundamentalmatrisen.*

Eftersom radsumman i $Q^m$ inte växer med $m$ (varför?) och är begränsad av något $\rho^m$ där $\rho < 1$ för tillräckligt stora $m$ har vi

$$\sum Q^m < \infty \quad \text{och} \quad (I-Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^m.$$

[Att radsumman är begränsad av $\rho^m$ visas på samma sätt som vi visade att $\mathbf{E}T < \infty$.]

Allmänt kan vi införa en "kostnad" $g(j)$ förbunden med varje besök i tillståndet $j \notin C$ (och $g(j) = 0, \ \ j \in C$). Sätter vi

$$w_i \equiv \mathbf{E}\{\sum_{n=0}^{\infty} g(X_n)|X_0 = i\}$$

anger $w_i$ förväntade kostnaden vid start från $i$. Summan är beroende av slumpen $\omega$ men den är ändlig n. s.

Förstastegsresonemanget ger

$$w_i = g(i) + \sum_{j \notin C} p_{ij} w_j \quad \text{eller i matrisform} \quad w = g + Qw$$

Lösningen är

$$w = (I-Q)^{-1} g.$$

## Rekurrens och transiens

**Definition.** $f_{ij}^n \equiv \mathbf{Pr}\{X_n = j, X_1, X_2, \ldots X_{n-1} \neq i | X_0 = i\}$

$f_{ij}^1 \equiv p_{ij}, \quad f_{ij}^0 \equiv 0$

Till att börja med intresserar vi oss speciellt för fallet $j = i$. Om $T$ betecknar första gången (efter tiden 0) processen besöker $i$ är alltså $f_{ii}^n = \mathbf{Pr}\{T = n | X_0 = i\}$

Vi har en *first-passage decomposition* eller dekomposition efter första besöket

$$(P^n)_{ii} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k (P^{n-k})_{ii}, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Utdelas: T59

**Definition.** $i \in E$ sägs vara *rekurrent (palautuva, recurrent)* om

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1, \ \ \text{dvs.} \ \ \mathbf{Pr}\{T < \infty\} = 1$$

*transient (väistyvä, transient)* om

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n < 1, \text{ dvs. } \mathbf{Pr}\{T < \infty\} < 1.$$

**Teorem.** *$i$ rekurrent* $\iff \sum_{n=1}^{\infty} (P^n)_{ii} = \infty$.

För beviset se utdelade T60-66.

**Korollarium.** *Rekurrens är en klassegenskap.*

Bevis: Se utdelade T67.

Kalla summan $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n$ för $f_{ij}^*$. Igen tar vi ofta $j = i$.

Beteckna med $\mathbf{Pr}\{X_n = j$ åtminstone N gånger $|X_0 = i\}$ med $Q_{ij}^N$ och låt $Q_{ij}$ vara $\lim_{N\to\infty} Q_{ij}^N = \mathbf{Pr}\{X_n = j$ för oändligt många $n|X_0 = i\}$.

**Proposition.** *$i$ rekurrent* $\iff Q_{ii} = 1$.

*Om $i$ och $j$ kommunicerar, dvs. tillhör samma ekvivalensklass, och $i$ är rekurrent, så är $Q_{ij} = 1$*

Bevis: Se utdelade T74-75.

**Anm.** Beteckningen

$$X_n = i \;\; i.\;\; o.$$

(infinitely often) betyder att $X_n = i$ för oändligt många $n$ med sannolikheten 1. $X_n = i \;\; f.\;\; o.$ (finitely often) betyder att med sannolikheten 1 är $X_n = i$ för högst ändligt många $n$.

**Exempel.** (Obrutna vinstföljder, *success runs*, jfr. Taylor och Karlin, avsnitt 4.4, samt utdelade T72-73)

Låt tillståndsrummet $E$ vara de icke-negativa heltalen och definiera

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & 0 & \cdots \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 1-p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}$$

Vi studerar återkomster till origo, tillståndet 0. Vi har

$f_{00}^1 = p_0, \;\; f_{00}^2 = (1-p_0)p_1, \;\; \ldots, f_{00}^n = (1-p_0)\cdots(1-p_{n-2})p_{n-1}$

Slutresultatet (se T72-73):

Origo är rekurrent om och endast om $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

## Förnyelseekvationen

Utdelas T76-78.

Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots$ vara positiva oberoende lika fördelade stokastiska variabler (livstider för glödlampor exempelvis). Glödlamporna byts ut när de går sönder, dvs. vid tidpunkterna $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \xi_1+\xi_2+\xi_3, \ldots$. Vid dessa tidpunkter sker alltså en *förnyelse (uusiutuminen* el. *toisto, renewal)*

Definiera $U_n$ som antalet förnyelser i intervallet $[0, n]$.

$U_n = 0$ om $\xi_1 > n$,
$U_n = 1$ om $\xi_1 \leq n < \xi_1 + \xi_2$,
....
$U_n = k$ om $\xi_1 + \ldots + \xi_k \leq n < \xi_1 + \ldots \xi_{k+1}$

Om vi nu kallar $\xi$:s fördelning $a$ [ $a_i = \mathbf{Pr}\{\xi = i\}, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$] och betecknar $\mathbf{E}U_n$ med $u_n$ har vi

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

eller, om vi betecknar summan i högra membrum med $b_n$,

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} a_k = b_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

eller annorlunda uttryckt (*förnyelseekvationen (uusiutumisyhtälö/toistoyhtälö, renewal equation)*

$$u - u * a = b.$$

I vår speciella tillämpning är $u_n = P_{ii}^n$, $a_n = f_{ii}^n$ och $b = (1, 0, 0, \ldots)$.

**Teorem.** *(Förnyelseteoremet) Om $a$, $u$ och $b$ är följder med $a \geq 0, \sum_k a_k = 1$, $\sum_k k a_k < \infty$ samt $\sum |b_k| < \infty$, sgf$\{n | a_n > 0\}$ och $u$ är begränsad och uppfyller*

$$u - a * u = b$$

*så gäller*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=0}^{\infty} k a_k}.$$

*Om $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \infty$ men förutsättningarna i övrigt är i kraft så är* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

## Asymptotiska beteendet hos $P^n$

Refereras till utdelade T78-83.

**Teorem.** *För en irreducibel operiodisk rekurrent Markovkedja gäller*

$$\lim_{n\to\infty}(P^n)_{ii} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n}.$$

*Under samma betingelser har vi*

$$\lim_{n\to\infty}(P^n)_{ji} = \lim_{n\to\infty}(P^n)_{ii}, \quad i,j \in E.$$

*I bägge fallen är gränsvärdena 0 ifall* $\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n = \infty$.

Beviset bygger på förnyelseteoremet, se T78-79.

**Korollarium.** *Ovanstående resultat gäller också för det fall att $i$ och $j$ hör till en rekurrent operiodisk klass $C$.*

Bevis: Restriktionen av $P$ till $C$ är övergångsmatrisen för en irreducibel kedja med tillståndsrummet $C$.

**Korollarium.** *Om klassen $C$ är periodisk med perioden $d$ har vi*

$(P^m)_{ii} = 0$ *om $d$ inte delar $m$*

$(P^m)_{ii} \to \frac{d}{\sum_n n f_{ii}^n}$ *om $d$ delar $m$.*

*Om $j \in C$ så är $(P^{kd+l})_{ji} > 0$ för något positivt $k$ och något $l$, $0 \le l < d$. För detta $j$ fås*

$(P^m)_{ji} = 0$ *om* $m \not\equiv l \pmod d$ *och*

$(P^m)_{ji} \to \frac{d}{\sum_n n f_{ii}^n}$ *om* $m \equiv l \pmod d$.

*För alla $j \in C$ har vi alltså*

$$\frac{1}{d}\sum_{l=0}^{d-1}(P^{kd+l})_{ji} \to \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n} \quad \text{as } k \to \infty.$$

**Anm.** Om $i$ och $j$ ligger i *olika* rekurrenta klasser så är förstås $(P^m)_{ji} = 0$ för alla $m$.

Om $i$ ligger i en absorberande klass och $j$ till en icke-absorberande klass så beror $(P^m)_{ji}$:s asymptotik väsentligt på de enskilda tillstånden $i$ och $j$ (och inte i avgörande grad på ekvivalensklasserna).

**Definition.** Det rekurrenta tillståndet $i$ sägs vara *positivt rekurrent (positiivisesti palautuva, positive recurrent)* om $\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n < \infty$.

Tillståndet $i$ är *nollrekurrent (nollapalautuva, null recurrent)* om $\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n = \infty$.

**Anm.** $i$ är positivt rekurrent om och endast om

$$\lim_{m\to\infty} (P^{md})_{ii} > 0$$

(där $d$ är $i$:s period). Ett annat ekvivalent villkor är

$$\limsup_{m\to\infty} (P^m)_{ii} > 0$$

(vilket i sin tur betyder att $(P^m)_{ii}$ *inte* går mot 0 då $m \to \infty$).

Se resumén på T83.

**Teorem.** *Låt $X$ vara operiodisk irreducibel och positivt rekurrent. Definiera*

$$\lim_{n\to\infty} (P^n)_{ii} = \pi_i > 0, \quad i \in E.$$

*Då är uppfyller radvektorn $\pi = (\pi_i)$ ekvationerna*

$$\pi = \pi P, \quad \sum_i \pi = 1.$$

*$\pi$ är den enda positiva vektor som uppfyller dessa ekvationer, mao. är $\pi$ den entydigt bestämda invarianta sannolikhetsfördelningen (map. $P$).*

För beviset se T84-86.

På sid. T89 beskrivs det asymptotiska beteendet hos $(P^n)_{ii}$ i de övriga fallen då $i$ och $j$ är rekurrenta. Återstår att beskriva fallet $j$ transient, $i$ rekurrent.

**Proposition.** *Om $i$ är operiodisk och rekurrent gäller att*

$$\lim_{n\to infty} (P^n)_{ji} = a_j(C)\pi_i.$$

*Om $i$ är periodisk med perioden $d$ gäller ovanstående formel lämpligt modifierad för $(P^n d)_{ji}$. Gränsvärdet för $(P^{nd+k})_{ji}$ fås genom att beräkna*

$$(\lim_{n\to\infty} P^{nd}) \cdot P^k.$$

Bevisskiss sid. T90.

## Rekurrens- och transienskriterier

Idén bakom dessa är ungefär denna: Det finns en liten mängd (kompakt då $E$ är ett topologiskt rum, ändlig då tillståndsrummet är diskret) $K$ så att rörelsen/hoppen/övergångarna utanför $K$ i medeltal går i riktning mot $K$. Det finns mao. en tendens till attraktion mot $K$.

Själva idén är bekant från teorin för dynamiska system (differentialekvationssystem), där den introducerades av A. M. Ljapunov (1857-1918) på 1890-talet. De funktioner vi kommer att introducera kallas ofta *Ljapunovfunktioner* eller *stokastiska Ljapunovfunktioner*. Kriterierna kallas ofta även *Fosters kriterier* (efter artikel av Foster 1953) eller *Tweedies villkor* (efter en lång serie artiklar av Richard L. Tweedie fr. o. m. ca 1976). Ibland förekommer alla tre namnen i olika permutationer.

**Teorem.** *Låt $E$ vara $\{0,1,2,3,\ldots\}$ och antag att kedjan är irreducibel. Kedjan är transient (dvs. varje element i $E$ är transient) om och endast om ekvationen*

$$(Py)_i = y_i, \quad i \neq 0$$

*har en begränsad, icke-konstant lösning.*

**Anm.** Om $y$ är konstant gäller ju *alltid* $Py = y$.

Bevis: T92-94.

**Teorem.** *Låt igen $E$ vara $\{0,1,2,3,\ldots\}$ och kedjan irreducibel. Ett tillräckligt villkor för rekurrens är existensen av en funktion (vektor) $y_i$, $i \in E$ sådan att*

$$i \to \infty \Longrightarrow y_i \to \infty$$

*och*

$$\sum_{j\in E} p_{ij} y_j \leq y_i, \quad i \neq 0.$$

**Anm.** $y_i = f(i)$ kallas Ljapunovfunktion för kedjan. Tolkningen är att $f$ är ett slags "generaliserad energi" som alltså minskar i medeltal. Den lilla mängden $K$ är i detta fall $\{0\}$.

$$Pf(i) = \mathbf{E}\{f(X_1)|X_0 = i\} = \sum_{j\in E} p_{ij} f_j$$

Teoremets innehåll är att

$$[\mathbf{E}\{f(X_1)|X_0 = i\} \leq f(i), i \neq 0, \text{ och funktionen } f \text{ obegr.}] \Longrightarrow X \text{ rekurrent.}$$

Det första villkoret skrivs ofta

$$\mathbf{E}\{f(X_1) - f(X_0)|X_0 = i\} \leq 0, \quad i \neq 0.$$

Bevis: Se T95-96.