STATISTISK INFERENS 1

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 14.5.2010

1. Antag att vi har tre pumpar, 1, 2 och 3, med respektive genomsnittliga felfrekvenser $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.3$ och $\lambda_3 = 0.4$ (enhet: 1/timme). Vi väljer en pump på måfå och observerar att det uppstod ett fel i den valda pumpen 5 timmar efter startningen. Beräkna sannolikheten att den valda pumpen var nr 1 då tiden till ett fel på pumpen i, i = 1, 2, 3, antas vara Exp(λ_i)-fördelad.

2. Låt den s.v. X vara Bin(5, θ)-fördelad där θ är ett utfall av en s.v. Θ som har diskret a-priori-fördelning på värdena 0.2 och 0.5. Låt $P\{\Theta = 0.2\} = 0.4$ och $P\{\Theta = 0.5\} = 0.6$. Bestäm a-posteriori-fördelningen för Θ givet X = 4.

3. Låt den s.v. X vara Bin(n, θ)-fördelad givet $\Theta = \theta$, $0 \le \theta \le 1$, där Θ har en a-priori-fördelningen med täthet

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ då } 0 \le \theta \le 1 \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

, dvs. Θ har den likformiga fördelningen på [0, 1]. Antag att vi har en observation x från X. Bestäm a-posteriori-fördelningen för Θ givet X = x. Vad heter fördelningen?

4. Låt observationer 0, 1 och 3 vara utfall av oberoende Poisson (θ)-fördelade s.v. X_1, X_2 och X_3 där θ är ett utfall en s.v. Θ med a-priori-fördelningen Exp(2). Bestäm a-posteriori-fördelningen för Θ givet $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ och $X_3 = 3$. Vad heter fördelningen?

5. En kontinuerlig stokastisk variabel Y säges ha Beta(r,s)-fördelning, r,s>0, om tätheten är

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} y^{r-1}(1-y)^{s-1} \text{ för } 0 \le y \le 1 \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$$

Antag att X är Bin(n, θ)-fördelad, där θ är ett utfall av s.v. Θ som har a-priori-fördelningen Beta(r,s). Låt x vara en observation från X. Bevisa att a-posteriori-fördelningen för Θ givet X = x är Beta(x+r, n-x+s).