STATISTISK INFERENS 1
DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 16.4.2010

1. Låt X vara en $N(10,3^2)$-fördelad stokastisk variabel. Vi betraktar följande tre händelser:

(a) Vi har av X en observation x som är $\geq 12$.
(b) Vi har av X tio oberoende observationer $x_1, \dots, x_{10}$, sådana att $x_1 + \dots + x_{10} \geq 120$.
(c) Vi har av X tio oberoende observationer $x_1, \dots, x_{10}$, sådana att medeltalet

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(x_1 + \dots + x_{10}) \geq 12.$$

Är alla tre händelser lika sannolika? Beräkna sannolikheterna.

2. Låt $x_1, \dots, x_n$ vara observationer, som är utfall av oberoende, likafördelade stokastiska variabler $X_1, X_2, \dots, X_n$. Antag att väntevärdet $\mu$ och variansen $\sigma^2$ existerar för $X_i$. Vi vill skatta $\mu$ med hjälp av stickprovsvariabeln

$$\mu_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Är skattningen konsistent? Beräkna medelkvadratfelet MSE.

3. Låt den stokastiska variabeln Y vara $Exp(\theta)$-fördelad (dvs. tätheten för Y är $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, då $x>0$, $f(x) = 0$ annars). Antag att vi har observationer 11.7, 13.6, 22.0, 3.5, 19.1, 7.0, som är utfall av oberoende stokastiska variabeln $Y_1, Y_2, \dots, Y_6$. Skatta $\theta$
(a) med hjälp av stickprovsvariabeln

$$\theta^* = \theta^*(Y_1, Y_2, \dots, Y_6) = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} Y_i} \qquad \text{(se exempel 2.2),}$$

(b) med ML-metoden.

4. Vi betraktar ett stort parti champinjoner, som är packade i påsar som väger ca. 1 kg. Vi antar att vikten av påsen är $N(\mu,\sigma^2)$ - fördelad, $\mu$ och $\sigma^2$ är okända parametrar. Påsar vägas 10 gånger med följande resultat (enhet: g):

950 1030 980 990 1020 980 1010 1010 960 1000.

Bestäm väntevärdesriktiga skattningar av medelvärdet $\mu$ och variansen $\sigma^2$.

5. Den diskreta s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p(k) = \{X = k\} = \theta(1-\theta)^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots,$$

där parametern $\theta \in (0,1)$ (geometrisk fördelning $Geom(\theta)$). Man har ett slumpmässigt stickprov 4, 5, 4, 6, 4, 1 från denna fördelning.

(a) Skriv upp likelihood-funktionen $L(\theta)$.

(b) Ange för vilket $\theta$ som $L(\theta)$ är störst. Vad är alltså ML-skattningen av $\theta$?