STATISTISK INFERENS I

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 26.3.2010

1 (a) Låt $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Bevisa att väntevärdet $E(X) = \lambda$.

(b) Låt $X \sim \text{Bin}(n,p)$. Bevisa att väntevärdet $E(X) = np$.

2. Antag att $X \sim N(0,1)$, dvs. X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \; x \in R.$$

Bevisa att för alla $\sigma, \mu \in R$, $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, dvs. $\sigma X + \mu$ är en stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \; x \in R$$

Ledning: Fördelningsfunktionen för X är $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$.

3. (a) Låt $X \sim N(0,1)$. Bestäm täthetsfunktionen för X^2. Vad heter den motsvarande fördelningen?
Ledning: Bestäm först fördelningsfunktionen.

(b) Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara oberoende, $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Bestäm fördelningen för $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

4. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler. Bevisa att

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1),\; Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \;\Rightarrow\; X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2), \text{ då } \lambda_1,\lambda_2>0.$$

Ledning: $P\{X+Y = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n-k\}$.

5. $X \sim \text{Bin}(n,p)$. Bevisa att $E(X) = np$ och $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

Ledning: Om $X \sim \text{Bin}(n,p)$, så kan X framställas i form $X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} I_{A_i}(\omega)$, där A_i, $i = 1, \dots, n$, är oberoende händelser med $P(A_i) = p$.