

Sannolikhetslära, delförhör II, 19.5.2010

1. **a)** Låt X vara en stokastisk variabel och $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ en följd av stokastiska variabler. Definera vad det betyder att X_i konvergerar mot X i fördelning då $i \rightarrow \infty$.
b) Formulera en variant av den centrala gränsvärdessatsen.
2. Per promenerar från en ort till en annan på två timmar och Anna går samma väg men i motsatt riktning på tre timmar. Per och Anna väljer sina starttider slumpmässigt och oberoende av varandra mellan 9 och 18 resp. mellan 9 och 15. Vad är sannolikheten att de möter varandra på vägen ?
3. Låt X och Y vara oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler och inför $U := X + Y$ och $V := X - Y$. Visa att U och V är okorrelerade, mao. $\mathbf{Cov}(U, V) = 0$, men inte i allmänhet oberoende.
4. Låt $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$. Bevisa att

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Beräkna gränsvärdet av detta uttryck då $n \rightarrow \infty$ och $p \rightarrow 0$ så att $np \rightarrow \lambda$ där $0 < \lambda < \infty$. Ge en tolkning av detta resultat med hjälp av Poissonfördelningen.

5. Låt $N, X_1, X_2, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler sådana att $N \sim \mathbf{Geom}(p)$ and $X_i \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots$. Bestäm fördelningen för summan $S_N := \sum_{i=1}^{N+1} X_i$.