Kompendium i

Propedeutisk matematik II

Daniel Djupsjöbacka
Bearbetat av Malin Hägg
Matematiska institutionen
Åbo Akademi

Åbo 2007

Innehåll

Kapitel 1

Inledning

Detta kompendium är i huvudsak skrivet av Daniel Djupsjöbacka. Jag har gjort en del korrigeringar, satt till några exempel samt ritat figurer.

Det som tas upp är integraler (kapitel 2), komplexa tal (kapitel 3), sannolikhetslära (kapitel 4) samt summor och talföljder (kapitel 5). Kompendiet baserar sig på böckerna Gymnasiematematik FII och FIII, skrivna av Oinas-Kukkonen m.fl.

Sådant som tagits upp i kompendiet för Propedeutisk matematik I (skrivet av Daniel Djupsjöbacka, bearbetat av Mikael Kurula) antas vara bekant.

Åbo 29.9.2007, Malin Hägg

Kapitel 2

Integraler

2.1 Derivata och primitiv funktion

I kursen *Propedeutisk matematik I* bestämde vi derivatan till en viss funktion.

Exempel 2.1

$$D\ln x = \frac{1}{x}$$

$$D\frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

Vi skall nu gå baklänges. Vi skall bestämma en funktion vars derivata är given.

Exempel 2.2

Om det är givet att $f'(x) = 3x^2$, hur ser då $f(x)$ ut?

Definition 2.1 Funktionen f är definierad i intervallet I. Då är F en *primitiv funktion* till f om

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{för alla } x \in I.$$

Exempel 2.3

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ och $G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$ är primitiva funktioner till $f(x) = x^2 + x$, ty:

$$F'(x) = G'(x) = x^2 + x = f(x).$$

Till en funktion finns det alltså många primitiva funktioner.

Exempel 2.4

Visa att $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ är **en** primitiv funktion till $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Från Propedeutisk matematik I vet vi att $Df^n = nf^{n-1} \cdot f'$. Med hjälp av detta fås att derivatan av $F(x)$ blir

$$D(\sqrt{x^2+1}) = D(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Sats 2.2 *Om F är en primitiv funktion till f, är alla funktioner av typen $F + C$ (där C är en konstant) och endast dessa, primitiva funktioner till f i det intervall där f är definierad.*

Detta betyder alltså att om vi har hittat en primitiv funktion, så har vi hittat alla! Dessa är av formen $F + C$.

2.2 Primitiv funktion till intervallfunktioner

Vad krävs av en primitiv funktion?

- Enligt definitionen bör den vara *deriverbar* på hela sin definitionsmängd, och därför *kontinuerlig.*
- För polynomfunktioner är detta inget problem, men med intervallfunktioner måste vi vara försiktiga, speciellt i de punkter där funktionen kan vara diskontinuerlig.

Exempel 2.5

Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Hur ser $F(x)$ ut? (Vi går närmare in på hur man räknar ut denna i nästa avsnitt.)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + C_1, & x \leq 1 \\ 2x + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

Vi hade två krav, kontinuitet och deriverbarhet:

1. Är $F(x)$ kontinuerlig?
   Krav:
   $$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1).$$
   Här gäller:
   $$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + C_2) = 2 + C_2$$
   $$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1\right) = \frac{3}{2} + C_1$$
   Nu måste det gälla att $2 + C_2 = \frac{3}{2} + C_1$. Detta ger att $C_1 = C_2 + \frac{1}{2}$.
   $$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} + C_2, & x \le 1 \\ 2x + C_2, & x > 1. \end{cases}$$
2. Är $F(x)$ deriverbar?
   Krav:
   $$\lim_{x\to 1^+} F'(x) = \lim_{x\to 1^-} F'(x).$$
   Här fås:
   $$\lim_{x\to 1^+} F'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$
   $$\lim_{x\to 1^-} F'(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = 2.$$
   $F(x)$ är alltså deriverbar och ges av
   $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} + C_2, & x \le 1 \\ 2x + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

Exempel 2.6

Undersök om det finns primitiva funktioner till
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Här är
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & x \le 1 \\ C_2, & x > 1. \end{cases}$$

Kontinuitetskravet ger att

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{2} + C_1.$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + C_1, & x > 1. \end{cases}$$

Är denna deriverbar?

Nej, ty

$$\lim_{x\to 1^+} F'(x) = \lim_{x\to 1^+} 0 = 0 \neq \lim_{x\to 1^-} F'(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1.$$

I det första exemplet existerade det en primitiv funktion, men inte i det andra. I det första exemplet var funktionen kontinuerlig, men inte i det andra.

Följande sats gäller, men bevisas inte:

Sats 2.3 *Om f är kontinuerlig på intervallet I existerar primitiva funktioner.*

Anmärkning 2.4 Det *kan* finnas primitiva funktioner även om f är diskontinuerlig.

2.3 Primitiv funktion till polynomfunktioner

Att derivera är ofta mekaniskt. Vi har klara regler som det är lätt att använda. För att hitta primitiva funktioner krävs ofta uppfinningsrikedom.

Vi har dock en hel del regler som hjälper oss och i nästan alla de exempel vi går igenom på kursen klarar vi oss med dessa.

Man kan ej uttrycka elementära primitiva funktioner till exempelvis följande funktioner:

$$\sqrt{x^3+1}, \quad \frac{\sin x}{x}.$$

Att hitta en primitiv funktion kallas att *integrera*. I Propedeutiska matematik I hade vi:

Derivataoperatorn: D

Nu använder vi:

Integrationsoperatorn: D^{-1}

Det gäller att

$$Df(x) = f'(x),$$
$$D^{-1}f(x) = F(x) + C.$$

Integrationsoperatorn och derivataoperatorn är varandras inverser, ty

$$D(D^{-1}f(x)) = f(x),$$
$$D^{-1}(Df(x)) = f(x) + C.$$

Vi presenterar nu några **regler** som vi kan använda vid integration:

1. $D^{-1}[cf(x)] = cD^{-1}f(x)$,
   d.v.s. en konstant kan flyttas utanför operatorn.
2. $D^{-1}[f(x) + g(x)] = D^{-1}f(x) + D^{-1}g(x)$.
3. $D^{-1}x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1.$

Jag presenterar ett bevis för påstående 3:

Bevis: $D\frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{1}{a+1}Dx^{a+1} = \frac{1}{a+1}(a+1)x^a = x^a$. Observera att detta gäller då $a \neq -1$.

De regler vi har gör nu att vi kan bestämma primitiva funktioner till alla polynomfunktioner.

Exempel 2.7

$D^{-1}(3x^4) \overset{(1)}{=} 3D^{-1}x^4 \overset{(3)}{=} \frac{3}{5}x^5 + C.$

Exempel 2.8

$D^{-1}(x^2+5x+1) \overset{(2)}{=} D^{-1}x^2 + D^{-1}5x + D^{-1}1 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + C.$

Exempel 2.9

$$D^{-1}\sqrt{x} = D^{-1}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Exempel 2.10

$$D^{-1}\frac{1}{x^2} = D^{-1}x^{-2} = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Ovanstående resultat gäller om definitionsmängden är sammanhängande. Om vi har $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ så leder detta till att

$$D^{-1}\frac{1}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Här är konstanterna C_1, C_2 oberoende av varandra, ty vi kan ändå inte göra funktionen kontinuerlig för $x = 0$.

Exempel 2.11

Sök primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^5}, \qquad x > 0.$$

Vi skriver om $f(x)$ och får

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} = x^{-5} + x^{-3}.$$

Detta ger

$$F(x) = D^{-1}f(x) = D^{-1}(x^{-5} + x^{-3}) =$$
$$-\frac{1}{4}x^{-4} + \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Om vi här antar att $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ skulle vi få följande primitiva funktion:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^2} + C_1, & x > 0 \\ -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^2} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

2.4 Primitiv funktion till transcendenta funktioner

Vad är transcendenta funktioner?

- Det är funktioner som ej kan definieras med $+, -, *, /$ eller rotdragning.
- Exempel är $\log x$, e^x, $\sin x$ o.s.v.

Exempel 2.12

$$D \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$
$$D \ln(-x) = \frac{1}{x}, \qquad x < 0.$$

$$\therefore \qquad D^{-1}\frac{1}{x} = \ln x + C, \qquad x > 0,$$
$$D^{-1}\frac{1}{x} = \ln(-x) + C, \qquad x < 0.$$

Vi har följande **regler för transcendenta funktioner:**

1. $D^{-1}\frac{1}{x} = \ln|x| + C$, i ett intervall som *inte* innehåller $x = 0$.
2. $D^{-1}e^x = e^x + C$,
3. $D^{-1}a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
4. $D^{-1}\sin x = -\cos x + C$,
5. $D^{-1}\cos x = \sin x + C$,
6. $D^{-1}\frac{1}{\cos^2 x} = D^{-1}(1 + \tan^2 x) = \tan x + C$,
   för alla intervall som *inte* innehåller $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d.v.s. där $\cos x = 0$,
7. $D^{-1}\frac{1}{\sin^2 x} = D^{-1}(1 + \cot^2 x) = \cot x + C$,
   för alla intervall som *inte* innehåller $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d.v.s. där $\sin x = 0$.

Exempel 2.13

Bestäm de primitiva funktionerna $F(x)$ då

a)

$$f(x) = \frac{3}{x-4}.$$

Vi skriver om $f(x)$ som $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x-4}$. Med hjälp av regel 1 fås då att

$$F(x) = 3 \ln |x-4| + C.$$

b)

$$f(x) = \frac{3^{2x}}{3^x}.$$

Här fås att $f(x) = \frac{3^{2x}}{3^x} = 3^x$ och då fås med hjälp av regel 3 att

$$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

c)

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}.$$

Nu gäller att $f(x) = \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\sin^2 x}$. Då fås enligt regel 7 att

$$F(x) = x + \cot x + C.$$

d)

$$f(x) = \tan^2 x.$$

Omskrivning ger $f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2) - 1$. Enligt regel 6 fås

$$F(x) = \tan x - x + C.$$

Exempel 2.14

Bestäm primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x}.$$

Vi börjar med att dela upp $f(x)$ och får

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x} = \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}.$$

Vi drar oss till minnes att $D^{-1}x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$.

Då fås

$$F(x) = \ln|x| - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Det måste gälla att $x > 0$ för att uttrycket skall vara definierat.

Detta ger att

$$F(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Exempel 2.15

Bestäm $f(x)$ då $f''(x) = -\sin x$.

Vi använder oss av reglerna 4 och 5 och får

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x, \\ f'(x) &= \cos x + C, \\ f(x) &= \sin x + Cx + C_1. \end{aligned}$$

2.5 Primitiv funktion till sammansatta funktioner

Detta är ett viktigt och mycket grundläggande avsnitt. I tidigare avsnitt har vi sett på en del grundregler, men på enbart dessa klarar man sig inte. Vi skall se på ett exempel som belyser detta:

Exempel 2.16

$$D^{-1}\sin 2x \neq -\cos 2x + C,$$

ty

$$D(-\cos 2x) = 2\sin 2x$$

p.g.a. *inre derivatan.*

Vi drar oss till minnes deriveringsregeln för sammansatta funktioner:

$$D(g(f(x)) = g'(f(x))f'(x),$$

där $f'(x)$ är det vi kallar inre derivata.

Ovanstående regel ger oss **integreringsregeln**

$$D^{-1}(g'(f(x))f'(x)) = g(f(x)) + C.$$

Den inre derivatan "äts alltså upp" vid integrering.

Exempel 2.17

$$D^{-1}\sin 2x$$

För att kunna använda ovanstående regel bör $f'(x)$ finnas med i uttrycket. I detta fall är inre derivatan 2 ($D2x = 2$). Vi kan inte bara sätta till 2, ty då ändrar vi den ursprungliga funktionen. Därför sätter vi in $\frac{1}{2}\cdot 2$ framför $\sin 2x$. Då fås

$$D^{-1}\sin 2x = D^{-1}\Big(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 2x\Big) = \frac{1}{2}D^{-1}(2\sin 2x) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Speciellt gäller följande regel:

$$D^{-1}(f'(x)(f(x))^a) = \frac{1}{a+1}(f(x))^{a+1} + C, \qquad a \neq -1.$$

Exempel 2.18

Bestäm primitiva funktioner till

a)

$$g(x) = (4x+3)^3$$

Här är inre derivatan 4, ty $D(4x+3) = 4$.

Detta ger:

$$G(x) = D^{-1}g(x) = D^{-1}(4x+3)^3 = D^{-1}\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (4x+3)^3 =$$
$$\frac{1}{4}D^{-1}4(4x+3)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(4x+3)^4 + C = \frac{1}{16}(4x+3)^4 + C.$$

b)

$$g(x) = \sqrt{1-4x}$$

Vi skriver om $g(x)$ som $g(x) = \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$.

Inre derivatan är -4, ty $D(1-4x) = -4$ och vi får:

$$G(x) = -\frac{1}{4}D^{-1}\left((-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right) =$$
$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(1-4x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}(1-4x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

c)

$$g(x) = (3x+3)(x^2+2x-1)^3$$

Inre derivatan fås som $D(x^2+2x-1) = 2x+2$. Denna finns "nästan".

För att ändra om $3x+3$ till $2x+2$ multiplicerar vi med $\frac{2}{3}$. Korrigeringstermen blir alltså $\frac{3}{2}$.

Då kan $g(x)$ skrivas som:

$$g(x) = (3x+3)(x^2+2x-1)^3 = \frac{3}{2}\cdot(2x+2)(x^2+2x-1)^3.$$

Nu kan regeln ovan användas och vi får

$$G(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(x^2+2x-1)^4 + C = \frac{3}{8}(x^2+2x-1)^4 + C.$$

d)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$$

Vi börjar med att skriva om $g(x)$. Det gäller att $g(x) = (\frac{x}{2}-1)^{-\frac{1}{2}}$. Inre derivatan är $\frac{1}{2}$. Detta ger

$$G(x) = D^{-1}\Big(2\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2}-1\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big) =$$
$$2\cdot 2\Big(\frac{x}{2}-1\Big)^{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{\frac{x}{2}-1} + C.$$

e)

$$g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Skriver om $g(x)$:

$$g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = (2x-1)(x^2-x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Deriverar x^2-x+1 och får att inre derivatan är $2x-1$. Denna finns redan i $g(x)$, vi behöver alltså inte sätta till någon inre derivata.

$$\therefore \quad G(x) = 2(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^2-x+1} + C.$$

f)

$$g(x) = x^2 \sin x^3$$

Inre derivatan är $3x^2$. Vi sätter till $\frac{1}{3} \cdot 3$. Detta ger

$$G(x) = \frac{1}{3} D^{-1}(3x^2)(\sin x^3) = \frac{1}{3} \cdot (-\cos x^3) + C = -\frac{1}{3} \cos x^3 + C.$$

g)

$$g(x) = \frac{\cot x}{\sin x}$$

Vi börjar än en gång med att skriva om $g(x)$. Vi vet att

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Detta ger

$$g(x) = \frac{\cot x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x(\sin x)^2.$$

Inre derivatan av $\sin^2 x$ är $\cos x$.

Då fås

$$G(x) = D^{-1} \cos x(\sin x)^2 = \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

Vi sa att regeln för $D^{-1}(f'(x)(f(x))^a)$ inte gäller för $a = -1$. Vad händer ifall $a = -1$?

Vid derivering av $\ln f(x)$ fås:

$$\begin{aligned} f(x) > 0: &\qquad D \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \\ f(x) < 0: &\qquad D \ln(-f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Detta ger upphov till regeln

$$D^{-1}\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C, \text{ i alla intervall där } f(x) \neq 0.$$

Exempel 2.19

Bestäm alla primitiva funktioner till

a)

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^3}, \qquad x > 1.$$

Derivatan av $1 - x^3$ är $-3x^2$. Då fås

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{-3x^2}{1-x^3}.$$

Detta ger

$$F(x) = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C.$$

Det var givet att $x > 1$. Detta leder till att $1 - x^3 < 0$, vilket ger att

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln(1-x^3) + C.$$

b)

$$f(x) = \tan x.$$

Vi vet att $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ samt att $D\cos x = -\sin x$. Det enda som saknas är alltså minustecknet. Vi får

$$F(x) = D^{-1}\Big(-\frac{-\sin x}{\cos x}\Big) = -\ln|\cos x| + C.$$

Här vet vi inget om värdet på $\cos x$, därför måste absolutbeloppet vara kvar.

c)

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}.$$

Inre derivatan fås som

$$D(1+\cos^2 x) = 2\cos \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x.$$

Vi vet att $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ så därför får vi

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} = -\frac{-2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x},$$

vilket ger

$$F(x) = -\ln|1+\cos^2 x| + C = -\ln(1+\cos^2 x) + C,$$

ty $1+\cos^2 x > 0$.

d)

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}.$$

Här har täljaren högre gradtal än nämnaren. Då kan man dividera de rationella polynomen. (Detta görs t.ex med “trappstegsmetoden”.) När detta gjorts erhåller vi att

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1} = x+3+\frac{3}{x-1}.$$

Nu använder vi kända metoder och får

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x-1| + C.$$

Om man deriverar funktionen $e^{f(x)}$ så får man $f'(x)e^{f(x)}$. Detta ger regeln

$$D^{-1}e^{f(x)}f'(x) = e^{f(x)} + C.$$

Exempel 2.20

Bestäm alla primitiva funktioner till

a)

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}.$$

Vi börjar med att skriva om $f(x)$ en aning:

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} = 1 + \frac{1}{e^{2x}} = 1 + e^{-2x}.$$

Inre derivatan är -2 och då får vi

$$F(x) = D^{-1}1 + D^{-1}\Big(-\frac{1}{2}\cdot(-2)e^{-2x}\Big) = x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x+1}}.$$

Denna funktion kan skrivas som $f(x) = e^{-2x-1}$. Inre derivatan är -2 och vi får

$$F(x) = D^{-1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot(-2)e^{-2x-1} = -\frac{1}{2}e^{-2x-1} + C = -\frac{1}{2e^{2x+1}} + C.$$

c)

$$f(x) = \sin x e^{\cos x}.$$

Eftersom $D\cos x = -\sin x$ så fås $f(x) = (-1)\cdot(-\sin x)e^{\cos x}$.

De primitiva funktionerna ges nu av

$$F(x) = -e^{\cos x} + C.$$

2.6 Sammanfattning över regler

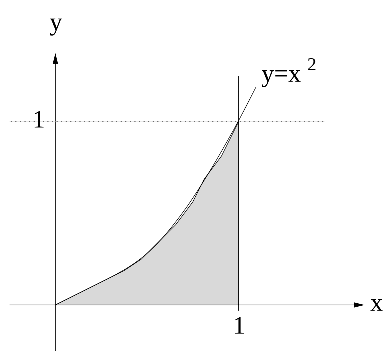
1. $D^{-1}[cf(x)] = cD^{-1}f(x)$,
   d.v.s. en konstant kan flyttas utanför operatorn
2. $D^{-1}[f(x) + g(x)] = D^{-1}f(x) + D^{-1}g(x)$
3. $D^{-1}x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1$
4. $D^{-1}\frac{1}{x} = \ln|x| + C$, i ett intervall som *inte* innehåller $x = 0$
5. $D^{-1}e^x = e^x + C$
6. $D^{-1}a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $D^{-1}\sin x = -\cos x + C$
8. $D^{-1}\cos x = \sin x + C$
9. $D^{-1}\frac{1}{\cos^2 x} = D^{-1}(1 + \tan^2 x) = \tan x + C$,
   för alla intervall som *inte* innehåller $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d.v.s. där $\cos x = 0$
10. $D^{-1}\frac{1}{\sin^2 x} = D^{-1}(1 + \cot^2 x) = \cot x + C$,
    för alla intervall som *inte* innehåller $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d.v.s. där $\sin x = 0$
11. $$D^{-1}(g'(f(x))f'(x)) = g(f(x)) + C$$
12. $$D^{-1}(f'(x)(f(x))^a) = \frac{1}{a+1}(f(x))^{a+1} + C, \qquad a \neq -1$$
13. $$D^{-1}\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C, \text{ i alla intervall där } f(x) \neq 0$$
14. $$D^{-1}e^{f(x)}f'(x) = e^{f(x)} + C$$

2.7 Definition på integral

Vi skall i detta avsnitt definiera begreppet integral. För att göra det börjar vi med ett exempel.

Exempel 2.21

Uppskatta storleken av det område som begränsas av parabeln $y = x^2$, koordinataxlarna och linjen $x = 1$. (Se figur 2.1).



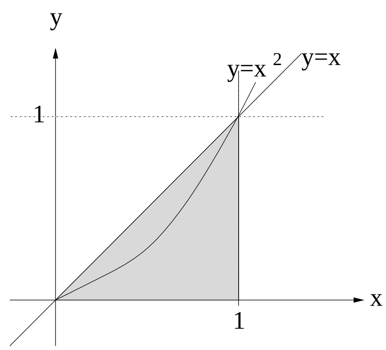
Figur 2.1:

Vi betecknar arean med A. Vi kan inte beräkna arean exakt med de metoder vi hittills har lärt oss, för den begränsas inte av raka linjer. Grafen av $y = x^2$ är ju inte en rät linje! Hur skall vi göra?

Man kan tänka sig att på olika sätt uppskatta det begränsade området. Om vi drar en linje mellan punkterna $(0, 0)$ och $(1, 1)$ ser vi att grafen ligger under denna. Arean måste alltså vara under $\frac{1}{2}$. (Se figur 2.2).

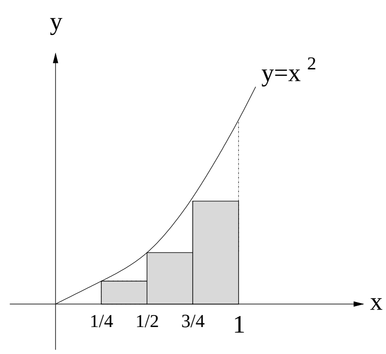
Arkimedes hade ett förslag. Han bestämde arean genom att dels underskatta och dels överskatta arean. Detta gjorde han genom att dela in x-axeln i ett antal lika stora bitar och med olika rektanglar skatta ytan.

Vi delar in intervallet $[0, 1]$ i fyra lika stora delar, så att vi får fyra delintervall med ändpunkterna $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$. Vi ritar sedan rektanglar vars ena punkt ligger på grafen. (se figurerna 2.3 och 2.4). Vi



Figur 2.2:

får nu två figurer, där figur 2.3 säkert är en underskattning av arean för x^2 och figur 2.4 med säkerhet är en överskattning av arean för x^2.

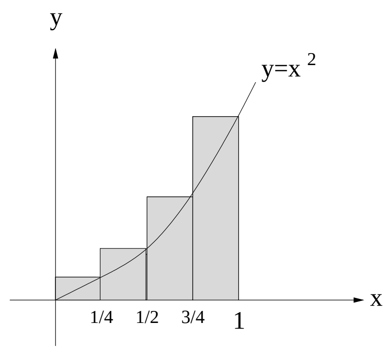


Figur 2.3:

Genom att räkna ut arean av rektanglarna kan vi skatta arean under grafen med ganska stor noggrannhet.

Den mindre arean kallas en *undersumma* medan den större kallas en *översumma*.

Undersumman betecknas med ett ett litet s, där ett index talar om hur många rektanglar vi arbetar med. Den beräknas för detta exempel som:



Figur 2.4:

$$s_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{4^3}\cdot(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{64} = 0,21875.$$

Översumman betecknas på motsvarande sätt med stort S där indexet anger hur många rektanglar man använder. Vi beräknar den i detta fall som:

$$S_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{4^3}\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2) = \frac{30}{64} = 0,46875.$$

Vi har nu fått ett intervall, $]0.21875, 0.46875[$, inom vilket arean med säkerhet ligger. Som vi ser har vi ett ganska stort intervall. För att minska detta intervall krävs det att vi ökar antalet rektanglar. Genom att indela intervallet i åtta delar fås att arean A ligger i intervallet $]0.273, 0.398[$. Detta är ett bättre resultat men ännu är intervallet rätt stort. För att få ett bättre värde bör vi dela in intervallet i ännu fler rektanglar.

Denna metod som vi nu har sett på skall vi använda för att definiera begreppet *integral*. Vi skall utgå från en *kontinuerlig* funktion f som är definierad på ett *slutet intervall* $[a, b]$. Vi indelar detta intervall i n stycken lika stora delar och bildar n stycken delintervall. Deras ändpunkter kallar vi $a = x_0$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = b$ och det gäller att $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Detta att funktionen är kontinuerlig innebär även att alla delintervall är kontinuerliga. Vi minns från första delen i Propedeutisk matematik att detta medför att det i varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ finns ett minsta värde m_k och ett största värde M_k.

Vi kallar nu mängden av intervalländpunkter $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ *indelningen* D. Med en indelning D kan vi med hjälp av minsta och största värdena i varje delintervall räkna ut under- och översummorna:

$$s(D) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$
$$S(D) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Speciellt för situationen att $f(x) \geq 0$ i hela intervallet $[a, b]$ kan man geometriskt tolka under- och översummorna som summor av rektangelareor.

Vi skall se på några egenskaper som utmärker under- och översummor.

1. Undersumman kan inte vara större än översumman, alltså

   $$s(D) \leq S(D) \text{ för alla indelningar } D.$$

2. Med en finare indelning (d.v.s. fler intervall) får vi även en bättre approximation av arean. Detta betyder att undersumman växer och översumman avtar. Om vi antar att vi har två indelningar, D och D', där D' är en finare indelning, så gäller det att:

   $$s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D).$$

3. Oberoende av hur vi indelar intervallet, så är varje undersumma $s(D_1)$ mindre än eller lika med varje översumma $S(D_2)$.

Hur skall vi nu gå vidare härifrån? Jo, med större noggrannhet i indelning av intervall och genom att tillämpa regel nummer två kan vi tänka oss att finns exakt ett tal A, så att talet är större än eller lika med varje undersumma och mindre än eller lika med varje översumma. Detta tal är lika stort som den sökta arean A. Detta utgör grunden för begreppet integral.

Definition 2.5 Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ (detta betyder samtidigt att den är begränsad). Låt $s(D)$ och $S(D)$ beteckna under- respektive översumman för en godtycklig indelning D av intervallet. Det går då att bevisa att det existerar ett och endast ett tal I, så att:

$$s(D) \leq I \leq S(D).$$

Vi kallar funktionen f *integrerbar* och talet I kallar vi *integralen* av funktionen f över intervallet $[a,b]$. Vi betecknar integralen med:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{eller} \qquad \int_a^b f.$$

Beteckningen $\int_a^b f(x)dx$ utläses *"integralen av f(x) från a till b"*. Talen a och b kallas den *undre* respektive den *övre integrationsgränsen*, $f(x)$ kallas *integrand* och x *integrationsvariabel*.

2.8 Geometrisk tolkning av integralen

I förra avsnittet definierade vi begreppet integral och såg på sambanden mellan arean under en funktion och integralen. Vi skall nu fortsätta på detta tema och se på integralen som en geometrisk tolkning av arean.

Exempel 2.22

Visa att den konstanta funktionen $f : f(x) = C$ är integrerbar i ett godtyckligt intervall $[a,b]$ och att

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

Funktionen är kontinuerlig på ett slutet intervall och därför integrerbar.

Vid uträkning av integralen skall vi minnas att oberoende av indelning D i intervallet $[a,b]$ så är funktionens minsta värde m_k lika stort som största värdet M_k som är lika med C, ty C är här en konstant. Det gäller alltså att

$$\begin{gathered} s(D) = S(D) = \sum_{k=1}^{n} C(x_k - x_{k-1}) = \\ C(x_1 - x_0) + C(x_2 - x_1) + \ldots + C(x_n - x_{n-1}) = \\ -Cx_0 + Cx_1 - Cx_1 + Cx_2 - \ldots - Cx_{n-1} + Cx_n = \\ Cx_n - Cx_0 = C(x_n - x_0) = C(b-a). \end{gathered}$$

Vi har alltså hittat ett värde för integralen genom att vi kunde "låsa in" det mellan under- och översummorna. Svaret är alltså:

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

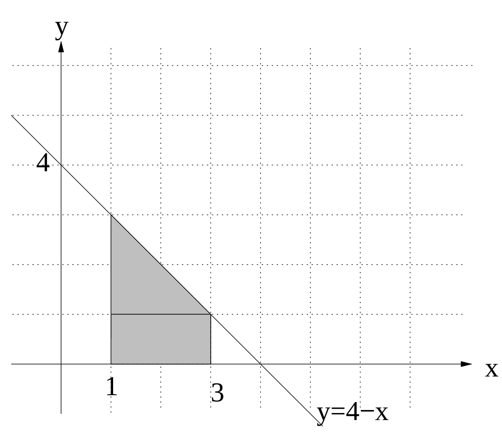
Geometriskt kan man tolka denna integral som arean av en rektangel.

Exempel 2.23

Bestäm

$$\int_1^3 (4-x)dx.$$

Geometriskt kan man räkna ut integralen som arean under linjen $y = 4 - x$ (se figur 2.5). Denna blir 4, ty arean för rektangeln är $2 \cdot 1 = 2$ och arean för triangeln är $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.



Figur 2.5:

Vi skall ändå använda den metod vi lärt oss:

Vi tänker oss att vi delar in intervallet i n lika stora delintervall. Längden för delintervallen är då $\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$.

Ändpunkterna för delintervallen ges av

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 + \frac{2}{n}$

$x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}$

$x_3 = 1 + 3 \cdot \frac{2}{n}$

$\vdots$

$x_{n-1} = 1 + (n-1) \cdot \frac{2}{n}$

$x_n = 1 + n \cdot \frac{2}{n} = 3.$

Funktionen är strängt avtagande. Detta betyder att den för varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ antar sitt största värde i $f(x_{k-1})$ och sitt minsta värde i $f(x_k)$.

Undersumman $s(D)$ var ju definierad som $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$.

I summan är $m_k = f(x_k) = 4 - x_k = 4 - (1 + k \cdot \frac{2}{n}) = 3 - k \cdot \frac{2}{n}$.

Differensen $x_k - x_{k-1}$ ges av $x_k - x_{k-1} = 1 + k \cdot \frac{2}{n} - (1 + (k-1) \cdot \frac{2}{n}) = \frac{2}{n}$.

När vi nu ska beräkna undersummorna s_n får vi följande uttryck:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \Big(3 - k \cdot \frac{2}{n}\Big) \cdot \Big(\frac{2}{n}\Big) =$$
$$\frac{2}{n}\Big[\Big(3 - 1 \cdot \frac{2}{n}\Big) + \Big(3 - 2 \cdot \frac{2}{n}\Big) + \ldots + \Big(3 - n \cdot \frac{2}{n}\Big)\Big] =$$
$$\frac{2}{n}\Big[3n - \frac{2}{n}(1 + 2 + \ldots + n)\Big] = \frac{6n}{n} - \frac{4}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n).$$

Här använder vi sedan regeln för summan av den aritmetiska serien: (tas upp i kapitel 5)

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Detta gör att s_n kan skrivas som

$$s_n = 6 - \frac{4}{n^2}\Big(\frac{n^2+n}{2}\Big) = 6 - 2\Big(\frac{n^2+n}{n^2}\Big) =$$
$$6 - 2\Big(\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}\Big) = 6 - 2 - \frac{2}{n} = 4 - \frac{2}{n}.$$

Vi skall fortsätta med att beräkna översumman. Översumman $S(D)$ var ju definierad som $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$. Funktionen är strängt avtagande vilket leder till att i intervallet $[x_{k-1}, x_k]$ antar funktionen sitt maximivärde M_k i punkten $f(x_{k-1})$.

Här fås M_k som $M_k = f(x_{k-1}) = 4 - x_{k-1} = 4 - (1 + (k-1) \cdot \frac{2}{n}) = 3 + (k-1) \cdot \frac{2}{n}$. Differensen $x_k - x_{k-1}$ ges fortfarande av $\frac{2}{n}$.

Vi räknar ut översumman:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(3 - (k-1) \cdot \frac{2}{n}) \cdot \Big(\frac{2}{n}\Big) =$$
$$\frac{2}{n}\Big[\Big(3 - \frac{2}{n} \cdot 0\Big) + \Big(3 - \frac{2}{n} \cdot 1\Big) + \ldots + \Big(3 - \frac{2}{n} \cdot (n-1)\Big)\Big] =$$
$$\frac{2}{n}\Big[3n - \frac{2}{n}(1 + 2 + \ldots + (n-1))\Big] =$$
$$\frac{6n}{n} - \frac{4}{n^2}(1 + 2 + \ldots + (n-1)).$$

Summan för den aritmetiska serien $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ är $\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$. Vi får nu att

$$S_n = 6 - \frac{4}{n^2}\Big(\frac{n^2-n}{2}\Big) = 6 - 2\Big(\frac{n^2-n}{n^2}\Big) =$$
$$6 - 2\Big(\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}\Big) = 6 - 2 + \frac{2}{n} = 4 + \frac{2}{n}.$$

Vi har nu ett uttryck för såväl under- som översummorna som varierar beroende på hur många intervall vi valt att indela $[1,3]$ i. Genom att öka antalet intervall så att deras antal går mot oändligheten kan vi undersöka gränsvärden för s_n och S_n. Dessa blir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 4.$$

Det enda tal I som kan uppfylla villkoret $s_n \leq I \leq S_n$ för varje n är 4.

Funktionen är alltså integrerbar (kontinuerlig på ett slutet intervall) och

$$\int_1^3 (4-x)dx = 4.$$

Vad vi sett här om förhållandet mellan storleken på integralen och arean under grafen kan sammanfattas i en sats:

Sats 2.6 *Antag att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och icke-negativ. Då är arean av det område som begränsas av kurvan $y = f(x)$, x-axeln och linjerna $x = a$ och $x = b$*

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

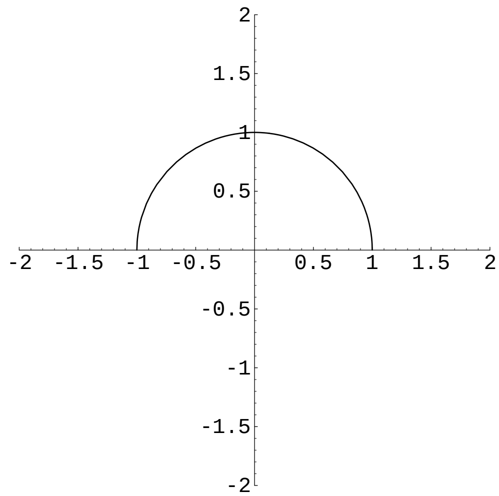
Exempel 2.24

Beräkna

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Vi börjar med att rita upp grafen (se figur 2.6) av funktionen $\sqrt{1-x^2}$. Grafen är halvcirkeln $x^2+y^2=1$ där vi ser på $y \geq 0$.

Funktionen är kontinuerlig på $[-1,1]$ och icke-negativ, alltså kan vi använda ovanstående sats. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ är lika med arean under funktionen $\sqrt{1-x^2}$. Denna är $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2}$.



Figur 2.6:

Vi kan också definiera begreppet integral för vissa typer av diskontinuerliga funktioner. Om vi tänker oss integralen som arean under grafen kan man tänka sig att addera ihop olika areor mellan diskontinuitetspunkterna. Vi skall utvidga vår definition på begreppet *integrerbar*.

Definition 2.7 Antag att en funktion f är begränsad och har ett ändligt antal diskontinuitetsställen $x_1, x_2, \ldots x_n$ i intervallet $[a, b]$. Då är f *integrerbar* och

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx + \int_{x_n}^{b} f(x)dx.$$

Exempel 2.25

Bestäm

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx, \text{ då } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{för } -3 \leq x < -1 \\ 3, & \text{för } -1 \leq x < 1 \\ 2, & \text{för } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vi inser att i intervallet $[-3, 2]$ finns 2 diskontinuitetspunkter, nämligen -1 och 1. Enligt ovanstående definition kan vi då skriva $f(x)$ som

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx.$$

Värden på $f(x)$ inom delintervallen var givna och i exempel 2.22 visade vi att då C är konstant gäller det att $\int_a^b Cdx = C(b-a)$.

Därför fås

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} 1dx + \int_{-1}^{1} 3dx + \int_{1}^{2} 2dx =$$
$$1(-1-(-3)) + 3(1-(-1)) + 2(2-1) = 2+6+2 = 10.$$

Exempel 2.26

Bestäm

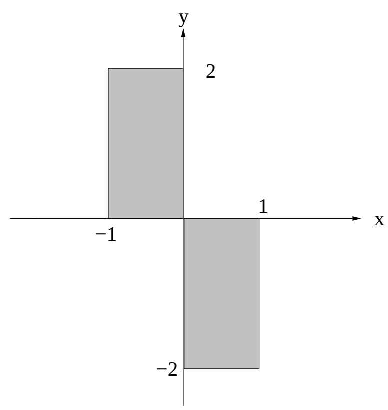
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx, \text{ då } f(x) = \begin{cases} -2, & \text{för } x > 0 \\ 2, & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

Funktionen f är diskontinuerlig, men begränsad och har ett ändligt antal diskontinuitetspunkter på $[-1,1]$, närmare bestämt en (i $x=0$). Funktionen är alltså integrerbar och

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2dx + \int_{0}^{1} (-2)dx =$$
$$2(0-(-1)) + (-2)(1-0) = 2-2 = 0.$$

Grafen till $f(x)$ finns uppritad i figur 2.7.

Anmärkning 2.8 I exemplet räknade vi med att arean blev negativ. Detta brukar vi inte göra och det känns kanske lite ovanligt. Arean är alltid positiv, men integralen kan vara negativ. Om funktionen ligger under x-axeln blir värdet på integralen negativt. I föregående exempel subtraherade vi alltså arean som ligger under x-axeln från den som ligger ovanför. I och med att areorna är lika stora blir svaret 0.



Figur 2.7:

Fråga: Vad betyder beteckningen dx?

Svar: dx anger med avseende på vilken variabel vi integrerar. På samma sätt som x:et i $f(x)$ anger att vi har en funktion som varierar med avseende på x så betyder dx att vi integrerar m.a.p. x.

2.9 Integralens egenskaper

När vi börjar räkna lite mer med integraler behöver vi några regler så att vi kan hantera dem. Genom att tänka på integralens geometriska tolkning kan man förstå att de är riktiga. Vi kommer inte att analytiskt bevisa dem.

Regler:

Antag att funktionerna f, g är kontinuerliga på $[a, b]$ och c är en konstant. Då gäller:

1. $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

3. $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Om funktionen är kontinuerlig i ett intervall som innehåller a, b och c gäller

4.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5.
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$
oberoende av storleksordningen på a, b och c.

6.
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{ om } f(x) \geq 0 \text{ på hela intervallet } [a, b].$$

7.
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \text{ om } f(x) \leq g(x) \text{ på hela intervallet } [a, b].$$

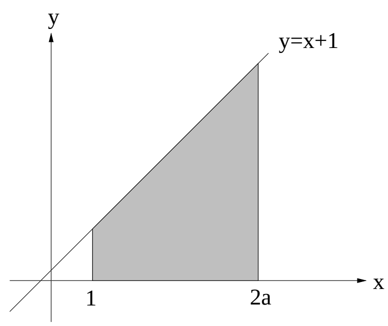
Exempel 2.27

Bestäm ett reellt tal a så att
$$\int_1^a (x+1)dx - \int_{2a}^a (x+1)dx = 6.$$

Med hjälp av regel 4 kan vi skriva
$$-\int_{2a}^a (x+1)dx = \int_a^{2a} (x+1)dx.$$

Sedan använder vi regel 5 och får att
$$\int_1^a (x+1)dx + \int_a^{2a} (x+1)dx = 6 \Leftrightarrow \int_1^{2a} (x+1)dx = 6.$$

Vi ritar upp funktionen $f(x) = x + 1$ (se figur 2.8).



Figur 2.8:

Funktionen skall integreras i intevallet $[1, 2a]$.

I punkten 1 är funktionsvärdet $f(1) = 1 + 1 = 2$ och i $2a$ är $f(2a) = 2a + 1$.

Utgående från grafen kan vi dela upp arean i två delar; en rektangel och en triangel.

Arean för rektangeln är $A_R = b \cdot h = (2a - 1) \cdot 2 = 4a - 2$. Motsvarande area för triangeln är

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2a-1)((2a+1)-2)}{2} = \frac{(2a-1)^2}{2}.$$

Nu gäller det att lösa ekvationen $A_R + A_T = 6$. Detta är ekvivalent med

$$4a - 2 + \frac{(2a-1)^2}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{8a - 4 + (4a^2 - 4a + 1)}{2} = 6 \Leftrightarrow$$
$$4a - 3 + 4a^2 = 12 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a - 15 = 0.$$

Detta ger, enligt lösningsformeln för andragradsekvationer, att

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

2.10 Integralfunktionen

Vi har nu försökt oss på två metoder att beräkna integraler, geometriskt (grafiskt) och med över- och undersummor. Det har varit arbetsdrygt även för enkla integraler och ännu vet vi inte t.ex. lösningen till

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Vi skall i fortsättningen se på sambandet mellan integralfunktionen och dess primitiva funktion. Integralfunktionen definieras som:

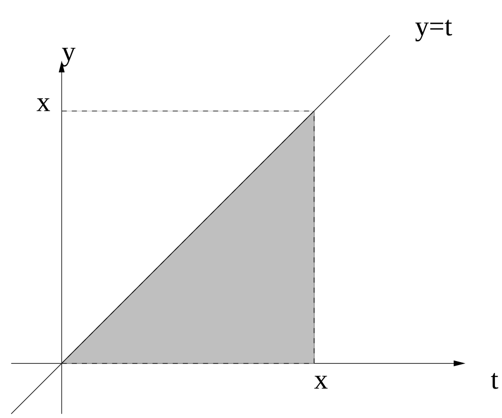
Definition 2.9 Antag att funktionen f är integrerbar i intervallet $[a, b]$. Integralen av funktionen f från a till x är då en funktion F, som är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$. (Här är alltså $a \leq x \leq b$.) Funktionen F benämns i *integralfunktion* och vi skriver

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Vi använder här t som variabel för f och x som variabel för F. Detta för att de inte i onödan skall bindas till varandra.

Exempel 2.28

Se på funktionen $f(t) = t$. Om vi ritar upp den får vi följande figur (se figur 2.9).



Figur 2.9:

Om vi undersöker arean under kurvan i intervallet $[0, x]$ kan vi räkna ut den som:

$$A = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Detta ger alltså att (om funktionen $F(x)$ beskriver arean under linjen):

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

Observera här att $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) = x$, ty $F'(x) = x$. Senare kommer vi att se att detta samband inte är slumpmässigt.

Sats 2.10 ***(Analysens huvudsats)*** *Antag att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$. Då är integralfunktionen F,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

deriverbar i intervallet $[a, b]$ och för alla $x \in [a, b]$ gäller att

$$F'(x) = f(x).$$

Anmärkning 2.11 I satsen är alltså $f(x)$ samma funktion som $f(t)$, men med en annan variabel.

Korollarium 2.12 *Till varje kontinuerlig funktion f existerar det (åtminstone) en primitiv funktion, nämligen integralfunktionen*

$$\int_a^x f(t)dt.$$

Exempel 2.29

$$D \int_a^x (t^2 + ct)dt = x^2 + cx,$$

ty om

$$F(x) = \int_a^x (t^2 + ct)dt$$

så gäller det att

$$F'(x) = f(x) = x^2 + cx.$$

Exempel 2.30

Är

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

strängt monoton?

Vi vet att om derivatan för en funktion är strängt positiv eller negativ så är funktionen strängt monoton.

$F'(x) = e^{x^2}$ är strängt positiv. Detta betyder att F är strängt växande, alltså strängt monoton.

Grafiskt kan man också tänka sig detta resultat. Det är ju naturligt att arean under grafen växer när x blir större (e^{t^2} är ju positiv).

2.11 Integralräkning med hjälp av primitiv funktion

I detta avsnitt kommer vi att bestämma integraler med hjälp av den primitiva funktionen. Den sats som nu följer brukar kallas *insättningsformeln.*

Sats 2.13 *Antag att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$. Om F är en primitiv funktion till f, gäller*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

När man bestämmer en integral, subtraherar man alltså värdet av den primitiva funktionen för den undre integrationsgränsen från värdet av den primitiva funktionen för övre integrationsgränsen.

Beteckningar:

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = \overset{b}{\underset{a}{\Big/}} F(x).$$

Begreppet integral definierades som gränsvärden av över- och undersummor när antalet intervall gick mot oändligheten. Det definierades utgående från att man ville ha ett mått på arean under en graf. Primitiva funktionen är däremot definierad som en invers operation till derivering.

Exempel 2.31

Beräkna
$$\int_{-1}^{2}(6x^2-2x+1)dx.$$

$$\int_{-1}^{2}(6x^2-2x+1)dx=\left[\frac{6}{3}x^3-\frac{2}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}=\left[2x^3-x^2+x\right]_{-1}^{2}=$$
$$(2\cdot 2^3-2^2+2)-(2\cdot(-1)^3-(-1)^2+(-1))=14-(-4)=18.$$

Fråga: Varför har vi ingen konstant med nu, när vi bestämmer primitiv funktion?

Svar: Det är onödigt. Vid subtraktionen skulle ändå två konstanter ta ut varandra.

Exempel 2.32

Beräkna
$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos^2 2x dx.$$

Här använder vi oss av regeln
$$D^{-1}f'(x)(f(x))^a=\frac{(f(x))^{a+1}}{a+1}+C, \qquad a\neq -1,$$
ty $\cos^2 2x$ är ju ett annat sätt att skriva $(\cos 2x)^2$.

Inre derivatan för $\cos^2 2x$ är $-\sin 2x\cdot 2$. Då fås

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos^2 2x dx=\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(-2\sin 2x)\cos^2 2x dx=$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin 2x)\cos^2 2x dx=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\cos^3 2x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\cos^3\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}\cos^3\left(2\cdot(-\pi)\right)\right]\overset{(1)}{=}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right]=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

där (1) fås ty $\cos\pi=-1$ och $\cos(-2\pi)=\cos 2\pi=1$.

Exempel 2.33

Beräkna

$$\int_{-1}^{2} |1-x|dx.$$

Enligt definitionen vet vi att

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{om } x \leq 1 \\ x-1, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Detta ger

$$\int_{-1}^{2} |1-x|dx = \int_{-1}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx =$$
$$\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{2} =$$
$$\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(-1-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] =$$
$$\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right] + \left[0 + \frac{1}{2}\right] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Exempel 2.34

Bestäm största och minsta värdet för funktionen

$$f(x) = \int_{1}^{2} \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right| dt$$

i intervallet $1 \leq x \leq 2$.

Observera att vi integrerar m.a.p t och inte x som vi är vana med.

Vi börjar med att reda ut absolutbeloppet. Enligt definitionen är

$$|f(t)| = \begin{cases} f(t), & \text{om } f(t) \geq 0 \\ -f(t), & \text{om } f(t) < 0 \end{cases}$$

Detta betyder att

$$\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right| = \begin{cases} \frac{1}{t}-\frac{1}{x}, & \text{om } \frac{1}{t}-\frac{1}{x} \geq 0, \text{ d.v.s. om } \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow t \leq x \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{t}, & \text{om } \frac{1}{t}-\frac{1}{x} < 0, \text{ d.v.s. om } \frac{1}{t} < \frac{1}{x} \Rightarrow t > x \end{cases}$$

Notera att t behandlas som variabel medan x behandlas som en konstant.

Vi skriver om funktionen $f(x)$ och beräknar sedan integralen:

$$f(x) = \int_1^2 \left|\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right| dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right) dt + \int_x^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right) dt =$$
$$\left[\ln|t| - \frac{t}{x}\right]_1^x + \left[\frac{t}{x} - \ln|t|\right]_x^2 \overset{t\geq 0}{=} \left[\ln t - \frac{t}{x}\right]_1^x + \left[\frac{t}{x} - \ln t\right]_x^2 =$$
$$\left[\left(\ln x - \frac{x}{x}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{x}\right)\right] + \left[\left(\frac{2}{x} - \ln 2\right) - \left(\frac{x}{x} - \ln x\right)\right] =$$
$$\ln x - 1 - 0 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} - \ln 2 - 1 + \ln x = 2\ln x - 2 + \frac{3}{x} - \ln 2.$$

Vi drar oss till minnes att maximi- och minimivärden kan hittas:

1. i derivatans nollställen,
2. i f:s diskontinuitetspunkter,
3. för x-värden där derivata saknas,
4. i definitionsintervallets ändpunkter.

Vi undersöker dessa punkter en i gången:

1. Här börjar vi med att derivera $f(x)$ och får

   $$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{2x-3}{x^2}.$$

   Vi räknar sedan ut för vilka värden på x som $f'(x) = 0$. Detta ger att $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

   Eftersom $\frac{3}{2} \in [1, 2]$ duger denna som en kandidat till var max- eller min-värdena kan finnas.

2. f saknar diskontinuitetspunkter i $[1, 2]$.
3. Det finns inga x-värden i $[1, 2]$ för vilka derivatan saknas.
4. Definitionsintervallet har ändpunkterna $x = 1$ och $x = 2$. Även dessa är alltså kandidater för max- och minvärden.

Det fanns alltså totalt tre kandidater. Vi beräknar $f(x)$ i dessa punkter:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{3}{2}: \\
&f(\frac{3}{2}) = 2\ln\frac{3}{2} - 2 + \frac{6}{3} - \ln 2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 - 2 + 2 - \ln 2 = \\
&\qquad 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln 9 - \ln 8 \approx 0,1178 \\
&x = 1: \\
&f(1) = 2\ln 1 - 2 + \frac{3}{1} - \ln 2 = 1 - \ln 2 \approx 0,3069 \\
&x = 2: \\
&f(2) = 2\ln 2 - 2 + \frac{3}{2} - \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,1931
\end{aligned}$$

Maximivärde är alltså $f(1)$ och minimivärde är $f(\frac{3}{2})$.

2.12 Areaberäkning, en funktion

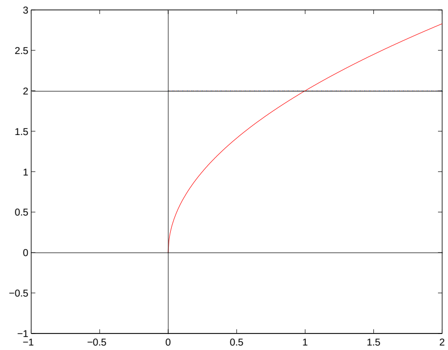
Vi har sett att integralen kan tolkas som arean under funktionen. Vi skall nu gå in lite djupare på detta område och undersöka vad som händer vid olika specialfall.

Exempel 2.35

Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y^2 = 4x$, y-axeln och linjen $y = 2$. (se figur 2.10)

Metod I:

Vi skriver om $y^2 = 4x$ som $y = 2\sqrt{x}$. (Vi väljer bort $-2\sqrt{x}$ ty $y \in [0, 2]$.)



Figur 2.10:

Härnäst integrerar vi $2\sqrt{x}$ från 0 till 1. Detta ger arean under kurvan.

$$\int_0^1 2\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = 2\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = 2\Big[\frac{2}{3}-0\Big] = \frac{4}{3}.$$

Detta är dock inte arean vi söker. För att få den “rätta” arean subtraherar vi bort $\frac{4}{3}$ från 2 (se figur).

Detta ger svaret

$$A = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\,a.e.$$

Metod II:

Istället för att integrera m.a.p x kan vi integrera m.a.p. y.

Vi börjar med att skriva om $y^2 = 4x$ som en funktion som beror av y:

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}.$$

Vårt integrationsområde är $[0, 2]$ (se på y-axeln i grafen!) Då fås:

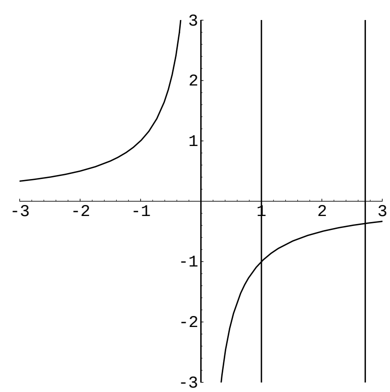
$$A = \int_0^2 \frac{y^2}{4}dy = \frac{1}{4}\int_0^2 y^2 dy = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{3}y^3\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\Big[\frac{8}{3}-0\Big] = \frac{2}{3}\,a.e.$$

Anmärkning 2.14 a.e. = areaenhet. Exempel på areaenheter är cm^2, m^2.

Vi drar oss till minnes att längden av en sträcka inte kan bli negativ och att vi därför använder abosolutbelopp när vi beräknar längden. På samma sätt kan en area inte bli negativ. Vi vet att om funktionen ligger under x-axeln så blir integralen negativ. När vi beräknar areor måste vi korrigera detta, så att inte arean blir negativ. Detta görs enklast genom att placera ett minus framför integralen om funktionen är negativ. Om grafen av funktionen inte finns på samma sida om x-axeln i hela integrationsintervallet kan vi dela in den i delintervall. Här gör vi alltså en särskillnad på integralen och arean.

Exempel 2.36

Bestäm arean av det område som begränsas av $y = -\frac{1}{x}$, x-axeln och linjerna $x = 1$ och $x = e$. (se figur 2.11)



Figur 2.11:

Här är

$$f(x) = -\frac{1}{x} < 0, \quad x \in [1, e].$$

$f(x)$ är alltid negativt $\Rightarrow$ vi placerar ett minustecken framför integralen. Nu fås

$$A = -\int_1^e \Big(-\frac{1}{x}\Big) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \Big[\ln x\Big]_1^e = 1 - 0 = 1 \; a.e.$$

Exempel 2.37

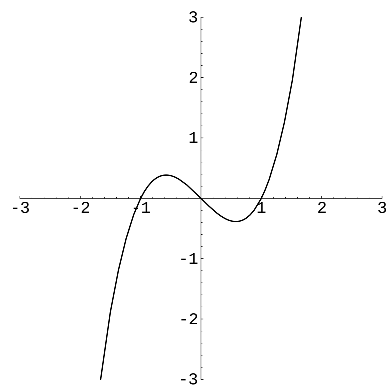
Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = x^3 - x$ och x-axeln.

Hur ser kurvan ut?

Nollställen är $\{-1, 0, 1\}$ och för $f(x) = x^3 - x$ gäller att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Kurvan har alltså följande utseende: (se figur 2.12)



Figur 2.12:

Vi ser att det gäller att

$$f(x) > 0, \quad \text{för } x \in [-1, 0],$$
$$f(x) < 0, \quad \text{för } x \in [0, 1]$$

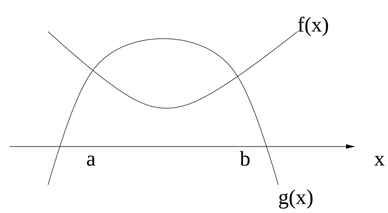
Vi delar upp intervallet i delintervall och får

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \Big(-\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\Big) =$$
$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx =$$
$$\Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{0} + \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} =$$
$$\Big[0 - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Big)\Big] + \Big[\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) - 0\Big] =$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ a.e.$$

Man kan även direkt skriva $A = \int_a^b |f(x)|dx$. Detta ger samma resultat.

2.13 Areaberäkning, två funktioner

I detta avsnitt beräknar vi areor som inte bara begränsas av en funktion och x-axeln, utan av två funktioner (exempel, se figur 2.13).



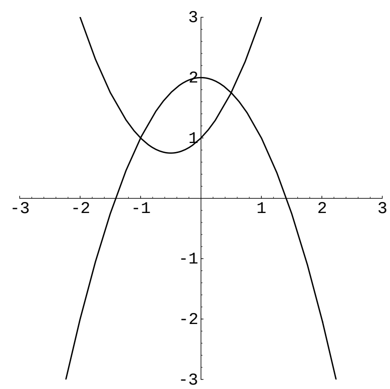
Figur 2.13:

För att bestämma denna area utgår vi från att $f(x) \geq g(x)$ på $[a, b]$. Vi räknar nu ut areorna under både f och g och subtraherar arean under g från arean under f.

Exempel 2.38

Kurvorna $y = x^2 + x + 1$ och $y = 2 - x^2$ innesluter ett område. Beräkna arean.

Vi börjar med att rita upp kurvorna (se figur 2.14)



Figur 2.14:

$f(x) = x^2+x+1$ är en uppåtriktad parabel och som saknar rötter ($D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$). Toppens x-koordinat är:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$g(x) = 2 - x^2$ är en nedåtriktad parabel med rötterna $\pm\sqrt{2}$. Toppens x-koordinat är:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

För att veta över vilket område vi skall integrera behöver vi kurvornas skärningspunkter. Dessa fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \overset{\text{subtraherar}}{\Longrightarrow} 0 = 2x^2 + x - 1$$

Denna ekvation har lösningarna

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Dessa x-värden ger i sin tur y-koordinaterna

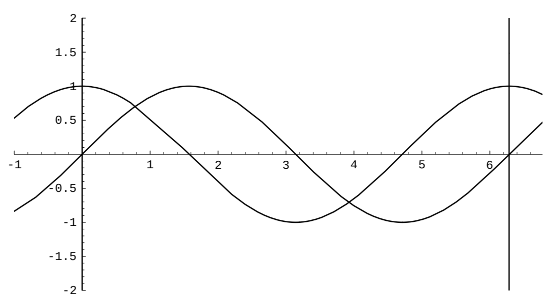
$$\begin{cases} y_1 = \frac{7}{4} \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Vi kan nu bestämma arean under $g - f$ (den övre kurvan $-$ den undre)

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - x^2)dx - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 + x + 1)dx =$$
$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - x + 1)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} =$$
$$\left[-\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] - \left[-\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + (-1)\right] =$$
$$\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{7}{24} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{9}{8}.$$

Exempel 2.39

Bestäm areorna av det område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$, $y = \cos x$ samt linjerna $x = 0$ och $x = 2\pi$. (se figur 2.15)



Figur 2.15:

Vi börjar med att undersöka linjernas skärningspunkter:

Sätter $\sin x = \cos x$. Det gäller att $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Då fås ekvationen

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

vilken har lösningarna

$$\begin{array}{lcl} x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2n\pi & \vee & x = -\dfrac{\pi}{2} + x + 2n\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi & & \textit{Lösning saknas} \end{array}$$

I intevallet $[0, 2\pi]$ fås således skärningspunkterna $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{5\pi}{4}$.

Av denna orsak är vi tvungna att dela in $[0, 2\pi]$ i delintervall. Vi får:

$I_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $I_2 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, $I_3 = \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.

I I_1 är $\cos x > \sin x$, i I_2 är $\sin x > \cos x$ och i I_3 är $\cos x > \sin x$.

Nu fås:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx =$$
$$\Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$
$$\Big[(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0)\Big] +$$
$$\Big[(-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}) - (-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4})\Big] +$$
$$\Big[(\sin 2\pi + \cos 2\pi) - (\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4})\Big] =$$
$$\Big[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\Big] + \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big] + \Big[0 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big] =$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\, a.e,$$

ty $D^{-1}\cos x = \sin x$ och $D^{-1}\sin x = -\cos x$.

Låt oss härnäst räkna exempel 2.36 på nytt:

Exempel 2.40

Bestäm arean av det område som begränsas av $y = -\frac{1}{x}$, x-axeln och linjerna $x = 1$ och $x = e$. (se figur 2.11)

Till skillnad från exempel 2.36 räknar vi nu ut detta som *arean mellan två funktioner*. På det sättet behöver vi inte bekymra oss om minustecket.

Ur figur 2.11 ser vi att övre gränsen är $y = 0$ och den undre är $y = -\frac{1}{x}$. Enligt uppgiften skall vi integrera från $x = 1$ till $x = e$. Då fås:

$$A = \int_1^e \left(0 - \left(-\frac{1}{x}\right)\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}\right)dx = \Big[\ln x\Big]_1^e =$$
$$\ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1 \; a.e.$$

Detta stämmer överens med svaret vi fick tidigare.

2.14 Volymberäkning

Vid volymberäkning av olika figurer har man ofta användning av integralkalkyl. Detta beror på att man kan beskriva kropparna som funktioner som roterar kring x-axeln eller y-axeln.

Vi vet att arean för en rak cylinder eller ett rakt prisma är bottenarean B gånger höjden H. Eftersom man med hjälp av integralen kan beskriva bottenarean betyder det att integralkalkylen är viktig vid beräkning av volymer.

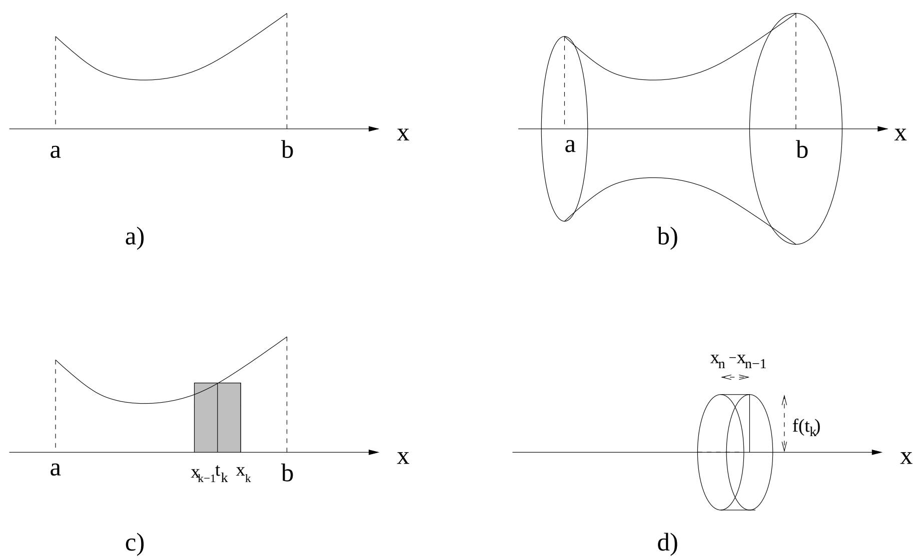
Vi börjar med att tänka oss en funktion som är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ (se figur 2.16 a). Genom att tänka sig att denna kropp roterar kring x-axeln bildar den en s.k. *rotationskropp* för vilken vi vill bestämma volymen (se figur 2.16 b). Hur skall vi då gå till väga?

När vi introducerade begreppet integral utgick vi från att dela in intervallet $[a, b]$ i olika delintervall. Genom att öka antalet delintervall kunde vi med större noggrannhet bestämma värdet på över- och undersummorna för att se vilket värde vi fick på arean. Även här har vi ett liknande angreppssätt. Vi tänker oss att vi delar in $[a, b]$ i n lika stora delintervall. Dessa delintervall är då:

$$[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{k-1}, x_k] \ldots [x_{n-1}, x_n = b].$$

Om vi ser på ett delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ är detta ett smalt segment (se figur 2.16 c). Från detta delintervall tar vi en godtycklig punkt t_k. Om vi nu tänker oss att detta segment roterar kring x-axeln så är frågan: vilken är volymen på segmentet? (se figur 2.16 d)

Vi vet att volymen för en cylinder är basarean gånger höjden. Basarean fås ju här som πr^2. I.o.m att vi har ett litet intervall kan vi approximera basarean med $\pi \cdot f(t_k)^2$. Segmentets volym kan alltså approximeras med $(x_k - x_{k-1}) \cdot \pi \cdot f(t_k)^2$. Detta kan, med beteckningen Δx_n för $(x_k - x_{k-1})$, skrivas som $\pi \cdot f(t_k)^2 \Delta x_n$.



Figur 2.16:

För att få volymen för hela kroppen, och inte bara ett segment av kroppen, bör vi summera ihop de olika volymerna:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f(t_k)^2 \Delta x_n.$$

Genom att öka antalet intervall får vi noggrannare volymberäkningar:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f(t_k)^2 \Delta x_n.$$

Om vi går tillbaka i våra anteckningar till avsnitt 2.7 (Geometrisk tolkning av integralen) ser vi att detta uttryck liknar mycket det uttryck vi hade när vi definierade integralen m.hj.a. under- och översummor. Dessa såg i princip ut som följer:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Med tillräckligt många intervall, n, gick under- och översummorna mot samma tal I. Vårt resonemang leder till att det är förståeligt att man kan definiera volymen m.hj.a. en integral.

Sats 2.15 *Se på en funktion $f(x)$ som är kontinuelig på $[a, b]$. Den volym som bildas av rotationskroppen då $f(x)$ roterar kring x-axeln är:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Exempel 2.41

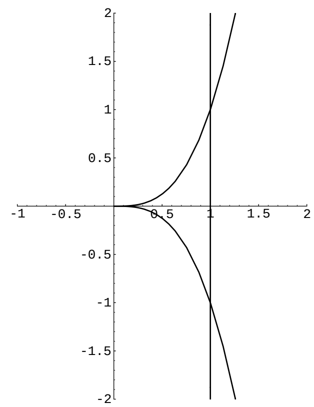
Området som avgränsas av kurvan $y = x^3$, y-axeln och linjen $x = 1$ roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår.

Vi börjar med att rita upp figuren (se figur 2.17):

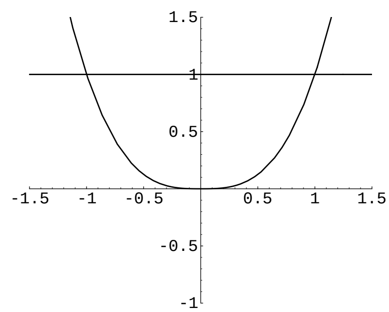
Enligt satsen ovan fås:

$$V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{\pi}{7} \; v.e.$$

$v.e$ står för volymenheter, ex cm^3.



Figur 2.17:



Figur 2.18:

Exempel 2.42

Det område som begränsas av kurvan $y = x^3$, y-axeln och linjen $y = 1$ roterar kring y-axeln. Beräkna volymen av “skålen” som bildas.

Om vi betraktar figuren (figur 2.18) inser vi att det är enklast att tänka sig att vi integrerar m.a.p. y-axeln, och inte med avseende på x-axeln. Vi börjar med att skriva om funktionen så att vi får en funktion som beror av y:

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Vi kan nu direkt tillämpa formeln ovan och får:

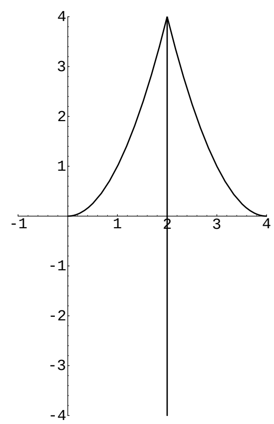
$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{5} \; v.e.$$

Exempel 2.43

Beräkna volymen av den rotationkropp som uppstår då området mellan kurvan $y = x^2$, x-axeln och linjen $x = 2$ roterar kring linjen $x = 2$.

Om vi sätter $x = 2$ får vi $y = 4$ (direkt insättning).

Hur skall vi nu göra? I det förra exemplet integrerade vi m.a.p y eftersom figuren roterade kring y-axeln. Även denna gång har vi en figur som roterar i y-led (se figur 2.19). Detta medför att vi inte skall se på $y = x^2$ utan på $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, 4]$.



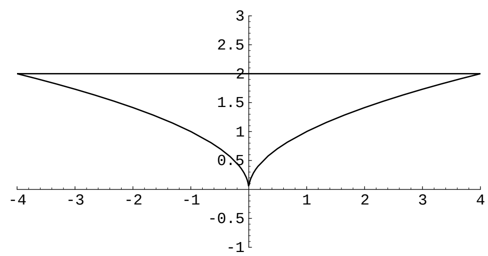
Figur 2.19:

I volymformeln integrerar vi upp arean av ett litet segment i figuren. Hur skall vi beskriva arean av ett segment i det här fallet? Jo, om vi tar $\pi \cdot (2 - \sqrt{y})^2$ får vi ett korrekt uttryck, ty radien för segmentet är ju $(2 - \sqrt{y})$ (se figur). Detta ger i sin tur volymformeln:

$$V = \pi \int_0^4 (2-\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - 4y^{\frac{1}{2}} + y) dy =$$
$$\pi\Big[4y - 4\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^2\Big]_0^4 = \pi\big(16 - \frac{8}{3}\cdot 8 + 8\big) = \frac{8\pi}{3}\ v.e.$$

Exempel 2.44

Beräkna volymen av den kropp som bildas då området som begränsas av kurvan $y=\sqrt{x}$, y-axeln och linjen $y=2$ roterar kring y-axeln.



Figur 2.20:

Här sker alltså rotationen kring y-axeln och vi integrerar m.a.p y. (Se figur 2.20) Det första vi då måste göra är att skriva om $y=\sqrt{x}$ som en funktion av y:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2.$$

Detta ger

$$V = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy =$$
$$\pi\Big[\frac{1}{5}y^5\Big]_0^2 = \pi\Big[\frac{1}{5}\cdot 2^5 - 0\Big] = \frac{32\pi}{5}\ v.e.$$

Exempel 2.45

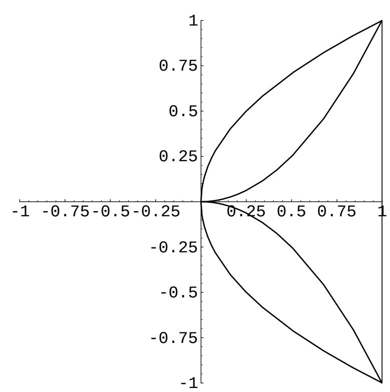
Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då det ändliga området mellan kurvorna $y=x^2$ och $y=\sqrt{x}$ roterar kring x-axeln.

Då vi hade att göra med areor mellan två funktioner, subtraherade vi arean under den undre kurvan från arean under den övre för att få den mellanliggande arean. När vi arbetar med rotaionskroppar använder vi samma metod.

Vi börjar med att räkna ut skärningspunkterna:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

$f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ skär alltså varandra i $x = 0$ och $x = 1$. Detta är integrationsområdet. (se figur 2.21) I intervallet $[0, 1]$ är $g(x) \geq f(x)$.



Figur 2.21:

Vi får alltså volymen:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$
$$\pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx =$$
$$\pi \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \pi \Big[\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 - 0\Big] = \frac{3\pi}{10}\, v.e.$$

Tilläggsuppgift: Hur stort är området om figuren roterar kring y-axeln? Eller kring linjen $x = 1$?

Anmärkning 2.16 Observera att volymen i föregående exempel **INTE** kan räknas ut som

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)^2 dx!$$

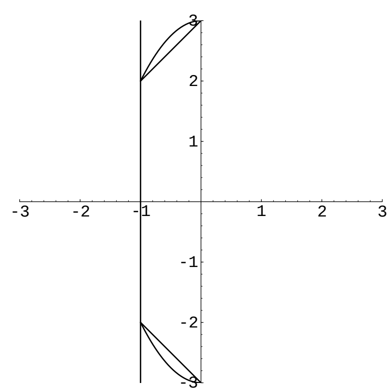
Exempel 2.46

Det ändliga området mellan linjen $y = x+3$ och kurvan $y = 3-x^2$ roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.

Vi räknar först ut skärningspunkterna:

$$x + 3 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1.$$

Vi ritar upp kurvorna (se figur 2.22) och inser att i $[-1, 0]$ är $g(x) = 3 - x^2 \geq f(x) = x + 3$.



Figur 2.22:

Då fås:

$$V = \pi \int_{-1}^0 (3 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-1}^0 (x+3)^2 dx =$$

$$\pi \int_{-1}^0 (9 - 6x^2 + x^4) dx - \pi \int_{-1}^0 (x^2 + 6x + 9) dx =$$

$$\pi \int_{-1}^0 (9 - 6x^2 + x^4 - x^2 - 6x - 9) dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{0} (x^4 - 7x^2 - 6x)dx = \pi \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2\Big]_{-1}^{0} =$$
$$\pi \Big[0 - \Big(\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{7}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2\Big)\Big] =$$
$$\pi\big(\frac{1}{5} - \frac{7}{3} + 3\big) = \frac{13\pi}{15}\ v.e.$$

Vi har nu sett hur man beräknar volymen för rotationskroppar. Vi kan utvidga detta och se på kroppar som inte är rotationskroppar, men som vi ändå vill beräkna volymen på. Om arean av ett plan vinkelrätt mot x-axeln beskrivs med $A(x)$ så fås volymen i intervallet $[a, b]$ som:

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

2.15 Generaliserade integraler

Hittills har vi sett på integraler för funktioner som varit begränsade och definierade på ett slutet intervall. Ofta är det dock intressant att undersöka vad som händer om integrationsintervallet är oändligt, exempelvis

$$\int_2^{\infty} f(x)dx,$$

eller om funktionen är obegränsad, exempelvis

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx.$$

Sådana integraler vars integrationsområde är oändligt eller där funktionen är obegränsad kallas *generaliserade integraler*.

Exempel 2.47

Vi skall börja med att se på integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Denna är inte begränsad, ty

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Den är inte heller definierad för $x = 0$.

Om vi tänker oss att vi integrerar mellan ett tal s, som ligger nära 0, och 1 så skulle vi få:

$$\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_s^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_s^1 = 2 - 2\sqrt{s}.$$

Genom att undersöka gränsvärdet då $s \to 0$ fås:

$$\lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{s\to 0}(2 - 2\sqrt{s}) = 2.$$

Vad vi kommer att göra är att vi definierar den generaliserade integralen med hjälp av detta gränsvärde. Vi har alltså en *obegränsad funktion men en begränsad yta.*

Exempel 2.48

Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx.$$

Vi gör på samma sätt som i föregående exempel och erhåller

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{s\to 0}\Big[\ln x\Big]_s^1 =$$
$$\lim_{s\to 0}(\ln 1 - \ln s) = -\lim_{s\to 0}\ln s = \infty.$$

Eftersom gränsvärde saknades så säger vi att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ inte existerar.

Om en generaliserad integral existerar, d.v.s. om vi har ett ändligt gränsvärde, säger vi inom matematiken att integralen *konvergerar* eller att den är *konvergent*. Om gränsvärde saknas, d.v.s. om den generaliserade integralen inte existerar, sägs integralen vara *divergent*, eller *divergera*.

Exempel 2.49

Undersök om integralen

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

konvergerar.

Funktionen är inte definierad för $x = 0$. Vi delar upp funktionen i två delar,

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

och undersöker dessa skilt:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{s \to 0} \int_{-1}^{s} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{s \to 0} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^{s} =$$
$$\lim_{s \to 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{s^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(-1)^2} \right] = -\frac{3}{2}$$

och

$$\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{s \to 0} \int_{s}^{8} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{s \to 0} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{s}^{8} =$$
$$\lim_{s \to 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{s^2} \right] = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 0 = 6.$$

Båda integralerna konvergerar och vi får

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$$

Fråga: Vad skulle hänt om den ena integralen konvergerat och den andra divergerat?

Svar: Då skulle vi sagt att hela den generaliserade integralen skulle vara divergent. Det räcker med att en del av en integral är divergent för att hela integralen skall vara divergent. På motsvarande sätt måste alla delintervall i en integral vara konvergenta för att hela integralen skall vara det.

I följande två exempel skall vi gå in på en viktig matematisk sats. Vi antar att vi har två funktioner f och g och det gäller att $f \leq g$ på hela definitionsmängden. Dessutom antar vi att g är konvergent. Eftersom $f \leq g$ för varje x, måste då också f vara konvergent. På motsvarande sätt gäller det att om $f \geq g$ på hela definitionsmängden och g är divergent så är f också divergent.

Exempel 2.50

Konvergerar integralen

$$\int_0^\infty e^{-x}dx?$$

Vi låter M beteckna ett stort positivt tal. Då fås:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^M = 0 - (-1) = 1.$$

$\therefore$ Integralen konvergerar.

Exempel 2.51

Konvergerar integralen

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx?$$

Till funktionen e^{-x^2} finns det inte direkt någon primitiv funktion. I detta fall är $x > 1$ (ty vi integrerar mellan 1 och ∞). Då gäller följande:

$$x < x^2 \Rightarrow e^x < e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{e^x} > \frac{1}{e^{x^2}} \Rightarrow e^{-x} > e^{-x^2}.$$

Nu kan vi med hjälp av satsen säga, att eftersom $\int_1^\infty e^{-x}dx$ konvergerar (den konvergerar ju på intervallet $[0, \infty]$) så måste också $\int_1^\infty e^{-x^2}$ konvergera.

2.16 Variabelbyte

Vi kommer i de följande avsnittena att behandla tre speciella metoder att hitta en primitiv funktion. Dessa metoder är mycket användbara och är bra att behärska.

Den första metoden kallas *variabelbyte*. Detta innebär att när vi hittills oftast har integrerat m.a.p. x, så skall vi göra en substitution, ett utbyte, så att vi får ett lättare uttryck. Vi illustrerar med ett exempel:

Exempel 2.52

Bestäm integralen

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx.$$

Vi har redan tidigare beräknat integraler av denna typ (se exempel 2.18 a)) Denna gång gör vi det dock m.h.a en variabelsubstitution, d.v.s. vi skall byta ut ett uttryck mot ett annat så vi får något som är enklare att integrera.

Att hitta ett lämpligt uttryck är inte alltid lätt, ibland handlar det om att gissa, men vi försöker:

Vi sätter $2x+1=t$. För att kunna sätta in t på platsen för $2x+1$ och sedan kunna integrera måste vi göra någonting åt dx. Vad vi skall göra är

1. Lös ut x ur substitutionen.
2. Derivera båda sidorna med avseende på t.
3. Lös ut dx.
4. Sätt in i integralen och ändra gränserna.

Vi börjar:

1. Lös ut x ur substitutionen.

$$2x+1=t \Leftrightarrow x=\frac{t-1}{2}.$$

2. Derivera båda sidorna med avseende på t.

   Här introducerar vi en ny beteckning:
   $$\frac{dx}{dt}.$$
   Detta betyder att man deriverar uttrycket x med avseende på t.

   Vi vet att $x = \frac{t-1}{2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$. Deriverar vi detta med avseende på t får vi att
   $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}.$$
3. Lös ut dx.
   $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}dt.$$
4. Sätt in i integralen och ändra gränserna.

   Vi har definierat $2x + 1 = t$. Detta har lett till att $dx = \frac{1}{2}dt$. Vad blir då integrationsgränserna?

   För den övre gränsen gäller att $t = 2x + 1$ och $x = 1$. Detta ger $t = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. På motsvarande sätt fås den undre gränsen, $x = 0$, som $t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Integrationsintervallet är alltså $[1, 3]$.

   Vi får:
   $$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx = \int_1^3 \frac{t^3}{2} dt.$$

Vi beräknar den nya integralen:
$$\int_1^3 \frac{t^3}{2} dt = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4}\right]_1^3 = \left[\frac{3^4}{8} - \frac{1^4}{8}\right] = \frac{80}{8} = 10.$$

Fråga: Vad betyder det att derivera m.a.p x och m.a.p t?

Svar: Vi visar detta med ett exempel: Vi tar uttrycket $x^2 - t^2x + 4t$. Om vi deriverar detta uttryck m.a.p x behandlar vi “alla andra bokstäver” som konstanter. D.v.s. deriverar vi uttrycket ovan m.a.p. x får vi $2x - t^2$. Om vi däremot deriverar m.a.p t behandlas alla bokstäver förutom t som konstanter. Uttrycket, deriverat m.a.p. t, blir därför $-2xt + 4$.

Att hitta lyckade variabelsubstitutioner kan verka vara slumpmässigt. En bra substitution är dock en som leder till att det uttryck man integrerar blir lättare.

Exempel 2.53

Beräkna

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx.$$

Även denna uppgift påminner om en vi räknat tidigare (ex 2.32). Vi skall nu använda oss av variabelsubstitution. Substitutionen vi använder är $\cos x = t$. Vi följer punkterna från förra exemplet och får:

1. Det är onödigt att lösa ut x, det blir bara mycket krångligare då, så vi “hoppar över” detta.
2. Istället för att derivera m.a.p t så deriverar vi med avseende på x. Då fås:
$$-\sin x = \frac{dt}{dx}.$$
3. Vi löser ut dx och får
$$dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$
4. Härnäst ska vi ändra gränserna. Detta görs genom att turvist sätta in övre och undre gränsen i substitutionen $\cos x = t$:
$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1.$$

Vi sätter in detta i integralen och får

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx \overset{(1)}{=} -\int_1^{\frac{1}{2}} t^3 dt.$$

(1) gäller ty termen $\sin x$ förkortas bort mot samma term i nämnaren för dt. Kom ihåg minustecknet, det försvinner inte!

Det enda som nu återstår är att lösa integralen

$$-\int_1^{\frac{1}{2}} t^3 dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}.$$

Exempel 2.54

Beräkna

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Detta är en integral som vi inte direkt kan hitta någon primitiv funktion till. Vi försöker med en variabelsubstitution. Det vi försöker med är:

$$x = 3 \sin t.$$

1. Uttrycket är löst m.a.p x.
2. Deriverar båda sidorna m.a.p t:

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cos t.$$

3. Löser sedan ut dx:

$$dx = 3 \cos t dt.$$

4. Ändra gränserna och sätt sedan in allt i integralen.

Gränsena kan inte bestämmas genom direkt insättning, det är dock inte svårt. Vi startar med den undre gränsen. För den är $x = 0$. Substitutionen var ju $x = 3\sin t$. Vi ska alltså hitta ett t för vilket $3\sin t = 0$. Vi får att $t = 0$ (se exempelvis MAOL). På samma sätt fås för den övre gränsen att

$$x = 3 \Rightarrow 3\sin t = 3 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Vi sätter in i integralen och får

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cdot 3\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t} \cdot 3\cos t dt =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Vi vet att

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2},$$

vilket ger att

$$9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)dt = \frac{9}{2}\Big[\frac{1}{2}\sin 2t + t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$\frac{9}{2}\Big[\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\sin(2\cdot 0) + 0\Big)\Big] =$$
$$\frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0\Big) = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}.$$

2.17 Partialbråksuppdelning

En annan metod som ofta kan vara nödvändig är att *partialbråksuppdela*. Det betyder att man skriver om ett rationellt uttryck så att man delar upp det i flera olika rationella uttryck.Vi skall se på ett exempel:

Exempel 2.55

Beräkna

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2 - 1}dx.$$

Detta är ett uttryck som vi inte direkt kan hitta någon primitiv funktion till. När vi har att göra med rationella uttryck är dock ofta den mest framkomliga vägen att partialbråksuppdela. Detta görs enligt:

1. Faktorisera nämnaren.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}.$$

2. Uppdela bråket i så många termer som det finns faktorer i nämnaren.

   Detta görs enligt:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

3. Bestäm A och B.

   Vi använder oss av den senare likheten i 2. och multiplicerar upp vänstra sidans nämnare:

$$\begin{gathered} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow \\ 1 = \frac{A(x+1)(x-1)}{(x+1)} + \frac{B(x+1)(x-1)}{(x-1)} \Leftrightarrow \\ 1 = A(x-1) + B(x+1). \end{gathered}$$

   I detta skede skiljer vi på termer som innehåller variabeln x och sådana som inte gör det.

$$\begin{gathered} 1 = A(x-1) + B(x+1) \Leftrightarrow \\ 1 = Ax - A + Bx + B \Leftrightarrow \\ 0x + 1 = Ax + Bx - A + B \Leftrightarrow \\ 0x + 1 = (A+B)x + (-A+B). \end{gathered}$$

   Vi bildar nu ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} 1 = & -A + B \qquad (1) \\ 0 = & A + B \qquad (2) \end{cases}$$

   Från (2) får vi att $-A = B$. Vi sätter in detta i (1) och får

$$\begin{cases} 1 = B + B = 2B \\ -A = B \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

4. Sätt in A och B i ursprungsekvationen.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Detta är ett uttryck vi kan integrera:

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx = \int_2^4 \Big(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\Big)dx =$$
$$-\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx =$$
$$-\frac{1}{2}\Big[\ln|x+1|\Big]_2^4 + \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|\Big]_2^4 =$$
$$-\frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) + \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$$

Exempel 2.56

Beräkna

$$\int_3^4 \frac{-2x^2+3x-4}{x^3-x^2-2x}dx.$$

1. Faktorisera nämnaren.

   Vi börjar med att räkna ut nämnarens nollställen:

   $$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee (x^2 - x - 2) = 0.$$

   För andragradsekvationen, $x^2 - x - 2 = 0$, gäller att:

   $$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \vee x = -1.$$

Vi får alltså

$$\frac{-2x^2+3x-4}{x^3-x^2-2x} = \frac{-2x^2+3x-4}{x(x-2)(x+1)}.$$

2. Uppdela bråket i så många termer som det finns faktorer i nämnaren.

$$\frac{-2x^2+3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

3. Bestäm A, B och C.

Vi förlänger högerled i ekvationen ovan för att kunna skriva allt på ett bråkstreck. Vi får:

$$\begin{gathered}
\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \\
\frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \\
\frac{A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)} = \\
\frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+1)} = \\
\frac{(A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A)}{x(x-2)(x+1)} \\
\overset{krav}{\equiv} \frac{-2x^2+3x-4}{x(x-2)(x+1)}
\end{gathered}$$

Detta ger oss ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{lcll}
A+B+C & = & -2, & \quad (1) \\
-A+B-2C & = & 3, & \quad (2) \\
-2A & = & -4, & \quad (3)
\end{array}\right.$$

Vi ser direkt från (3) att $A = 2$. Sätter vi in detta i (1) och (2) fås

$$\left\{\begin{array}{lcl}
2+B+C & = & -2 \\
-2+B-2C & = & 3 \\
A & = & 2
\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll}
B+C & = & -4, & \quad (1) \\
B-2C & = & 5, & \quad (2) \\
A & = & 2, & \quad (3)
\end{array}\right.$$

Sedan löser vi ut B ur (2), sätter in detta i (1) och får på det sättet ut C. Sätter sedan in värdet på C i (2) för att få ett värde på B.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C &= -4 \\ B &= 5+2C \\ A &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+2C+C &= -4 \\ B &= 5+2C \\ A &= 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3C &= -9 \\ B &= 5+2C \\ A &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C &= -3 \\ B &= 5+2\cdot(-3) \\ A &= 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= 2 \\ B &= -1 \\ C &= -3 \end{cases}$$

4. Sätt in A, B och C i ursprungsekvationen.

$$\frac{-2x^2+3x-4}{x^3-x^2-2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1}.$$

Nu kan vi integrera. Vi får:

$$\int_3^4 \frac{-2x^2+3x-4}{x^3-x^2-2x}dx = \int_3^4 \Big(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1}\Big)dx =$$
$$\Big[2\ln|x| - \ln|x-2| - 3\ln|x+1|\Big]_3^4 =$$
$$\Big(2\ln 4 - \ln 2 - 3\ln 5\Big) - \Big(2\ln 3 - \ln 1 - 3\ln 4\Big) =$$
$$2\ln 2^2 - \ln 2 - 3\ln 5 - 2\ln 3 + 3\ln 2^2 =$$
$$4\ln 2 - \ln 2 - 3\ln 5 - 2\ln 3 + 6\ln 2 = 9\ln 2 - 3\ln 5 - 2\ln 3.$$

Här användes regeln $\log x^r = r\log x$.

2.18 Partiell integration

Partiell integration är en tredje metod att integrera när en primitiv funktion inte direkt går att hitta. Den är speciellt användbar när vi har en produkt av två funktioner som skall integreras. Vi börjar med att härleda regeln för partiell integration.

Vi vet att deriveringsregeln för en produkt är:

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Vi flyttar om termerna och får:

$$f(x)g'(x) = D(f(x)g(x)) - f'(x)g(x).$$

Skulle vi nu vilja integrera uttrycken på båda sidorna av "likamed"-tecknet skulle vi få (detta kan vi göra för om vi har två uttryck som är lika måste även integralen av dem vara lika):

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b D(f(x)g(x))dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Integralen är ju derivatans invers, vilket leder till att:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Om vi nu ser på det uttryck vi har är detta en regel för att skriva om en integral. Vi belyser med några exempel.

Exempel 2.57

Beräkna

$$\int_1^e x \ln x dx.$$

Här har vi en produkt av två funktioner, x och $\ln x$. Vi sätter

$$\begin{aligned} f(x) =& \ln x \\ g'(x) =& x. \end{aligned}$$

Vi skall nu bilda $f'(x)$ och $g(x)$. Dessa är:

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{x} \\ g(x) =& \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Vi tillämpar regeln ovan och får

$$\int_1^e x \ln x dx = \Big[\frac{1}{2}x^2 \ln x\Big]_1^e - \int_1^e \Big(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2\Big) dx =$$
$$\Big[\frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \ln 1\Big] - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e =$$
$$\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\Big] = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Exempel 2.58

Beräkna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

Här väljer vi att sätta $f(x) = x$ och $g'(x) = \sin x$. Detta ger

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$$

Vi använder nu regeln för partiell integreration och får

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -\Big[x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 \cdot (-\cos x)\Big) dx =$$
$$-\Big[\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0\Big] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Exempel 2.59

Bestäm konstanten a så att

$$\int_1^a \ln x dx = 1.$$

Här verkar det kanske som om vi inte har en produkt av två funktioner, men om vi sätter :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

ser vi att vi kan tolka $\ln x$ som en produkt. Vi bildar nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= x. \end{aligned}$$

Vi kan direkt tillämpa regeln för partiell integration:

$$\int_1^a \ln x dx = \Big[x \ln x\Big]_1^a - \int_1^a \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) dx =$$
$$a \ln a - 1 \ln 1 - \int_1^a 1 dx = a \ln a - \Big[x\Big]_1^a = a \ln a - a + 1.$$

Nu återstår ännu att bestämma a så att $\int_1^a \ln x dx = 1$. Vi får

$$\int_1^a \ln x dx = 1 \Leftrightarrow a \ln a - a + 1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$a \ln a = a \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e.$$

Kapitel 3

Komplexa tal

3.1 Definition på komplexa tal

Vi har till en viss del diskuterat problematiken med att lösa ekvationer av typen:

$$x^2 + 2 = 0.$$

I vår definition av kvadratroten har vi krävt att talet under kvadratroten skall vara större än eller lika med noll. Ändå skulle det i många fall vara praktiskt att inte ha detta krav. Vi skall nu utveckla de talområden vi har och se på den *komplexa talmängden*. För att göra detta antar vi att det finns ett tal i, med den egenskapen att:

$$i^2 = -1.$$

Vi kallar detta tal i för en *imaginär enhet*. (imaginär=overklig, tänkt).

Vi skall nu se på ett tal, $a + bi$, där a och b är reella tal. Vi antar att vi kan addera och multiplicera dessa, precis på samma sätt som med vanliga polynom. Dessutom skall vi inte glömma att $i^2 = -1$.

Exempel 3.1

a) $(3 + 2i) + (4 - i) = 3 + 2i + 4 - i = 7 + i$

b) $(2+3i)(5-i) = 10-2i+15i-3i^2 = 10-2i+15i+3 = 13+13i.$

För ett tal, $a + bi$, kan vi även införa beteckningen (a, b). Med den beteckningen gäller följande defintion:

Definition 3.1 De komplexa talen är talpar, för vilka addition och multiplikation definieras på följnade sätt:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

De komplexa talens mängd betecknas med $\mathbf{C}$.

För ett komplext talpar gäller det att:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ och } b = d.$$

När man behandlar komplexa tal använder man ofta symbolen z som beteckning på ett komplext tal, dvs $z = (a, b)$.

Exempel 3.2

Sätt $z = (1, 2)$. Beräkna $z + (2, 3)$ och z^2.

$$z + (2, 3) = (1, 2) + (2, 3) = (3, 5)$$
$$z^2 = (1, 2)^2 = (1, 2)(1, 2) = (1 - 4, 2 + 2) = (-3, 4)$$

Exempel 3.3

Bestäm x och y så att $z_1 = z_2$ då $z_1 = (x^2 - 2, 2)$ och $z_2 = (0, |y|)$.

För att likhet ska gälla måste de reella delarna vara lika och de imaginära delarna av talen vara lika, d.v.s.

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

och

$$2 = |y| \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Vi skall nu införa räkneregler som gäller för komplexa tal. Vi ser på tre godtyckliga komplexa tal, z_1, z_2 och z_3.

	Addition	Multiplikation
1. Kommutativa lagen	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Associativa lagen	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
3. Distributiva lagarna	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$	
4. Neutralt element	$(a,b) + (0,0) = (a,b)$ $(0,0)$ är neutralt element	$(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$ $(1,0)$ är neutralt element
5. Inverst element	$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$ $(-a,-b)$ är det motsatta talet	$z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z} = (1,0)$ z^{-1} är det inverterade talet

Exempel 3.4

Sätt $z = (3,2)$. Bestäm det motsatta och det inverterade talet.

Från tabellen ovan ser vi att det motsatta talet fås som

$$-z = (-3,-2).$$

För det inverterade talet vet vi att $z \cdot z^{-1} = (1,0)$. Om vi kallar z^{-1} för (a,b) så gäller det att

$$(3,2)(a,b) = (1,0) \Leftrightarrow (3a - 2b, 3b + 2a) = (1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} \\ 2\left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\right) + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}b + \frac{2}{3} + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3}b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{13} \\ b = -\frac{2}{13}. \end{cases}$$

Det inverterade talet är alltså

$$z^{-1} = \left(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right).$$

3.2 Komplexa tal på formen $a + ib$

Vi tänker oss nu ett reellt tal c. Vi såg på beteckningen $a + bi$ för komplexa tal. Talet c kan då skrivas som $c + 0i$, d.v.s som $(c, 0)$.

Vi skall multiplicera ett reellt tal t med ett komplext tal (a, b). t kan skrivas som $(t, 0)$ och reglerna för multiplikation av komplexa tal ger att:

$$(t, 0) \cdot (a, b) = (ta - 0b, tb + 0a) = (ta, tb).$$

Detta ger upphov till följande regel:

Regel: Produkten av det reella talet t och det komplexa talet (a, b) är:

$$t \cdot (a, b) = (ta, tb).$$

Vi skall även utgående från vår definition på komplexa tal som talpar med vissa egenskaper, härleda den egenskap på talet i som vi eftersträvade, nämligen att $i^2 = -1$.

Eftersom i kan skrivas som $0 + 1i$, kan vi beteckna i som $(0, 1)$. Om vi undersöker $i \cdot i$ får vi:

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0),$$

d.v.s vi har verifierat att regeln

$$i^2 = -1$$

gäller.

Vi skall sammanfatta vad vi hittills gått igenom:

Sammanfattning:

- Det komplexa talet $i = (0, 1)$, som benämns *imaginär enhet*, uppfyller likheten $i^2 = -1$.
- Varje komplext tal $z = (a, b)$ kan skrivas på formen $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$.
- I det komplexa talet $z = a + bi$ kallas a för *reell del* och b kallas för *imaginär del*. Man brukar beteckna detta $a = \text{Re}(z)$ och $b = \text{Im}(z)$.

- Vi kallar det komplexa talet $z = a + bi$ för:

  reellt om $b = 0$,

  imaginärt om $b \neq 0$,

  rent imaginärt om $a = 0$ och $b \neq 0$.

Exempel 3.5

Beräkna
a) $2(3 - i) - 3(-2 + 5i)$,

b) $(2 - 3i)(2 + 3i)$,

c) $\frac{1}{3}(3 - 6i)^2$,

d) $(1 - i)^4$

Vi använder det vi lärt oss och får:

a)

$$2(3 - i) - 3(-2 + 5i) = 6 - 2i + 6 - 15i = 12 - 17i.$$

b)

$$(2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9 \cdot (-1) = 13.$$

c)

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}(3 - 6i)^2 = \frac{1}{3}(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot (-6i) + (-6i)^2) = \\ \frac{1}{3}(9 + 36i + 36i^2) = \frac{1}{3}(9 + 36i - 36) = \\ \frac{1}{3}(-27 + 36i) = -9 + 12i.\end{gathered}$$

d)

$$\begin{gathered}(1 - i)^4 = ((1 - i)^2)^2 = (1 - 2i + i^2)^2 = \\ (1 - 2i - 1)^2 = (-2i)^2 = 4 \cdot (-1) = -4.\end{gathered}$$

Exempel 3.6

Beräkna

a) i^3,

b) i^{23},

c) i^{4n+2}

a)
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$$

b)
$$i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = (i^2)^{10} \cdot i^3 = (-1)^{10} \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-i) = -i.$$

c)
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = (i^{2n})^2 \cdot (-1) \overset{(1)}{=} 1 \cdot (-1) = -1,$$

där (1) gäller ty i^{2n} är alltid -1 eller 1 eftersom $2n$ alltid är ett jämnt tal. Kvadrerar man detta fås 1, oberoende av värdet på n.

Exempel 3.7

Lös ekvationen $5z - (5 - 4i) = 3 - 2i + 3z$ med avseende på z.

$$5z - (5 - 4i) = 3 - 2i + 3z \Leftrightarrow 5z - 3z = 3 - 2i + (5 - 4i) \Leftrightarrow$$
$$2z = 8 - 6i \Leftrightarrow z = 4 - 3i.$$

Exempel 3.8

Bestäm de reella talen $x, y \in \mathbf{R}$ så att $(x^2 - i) - (x - 2yi) = 0$.

Här måste det gälla att $(x^2 - i) = (x - 2yi)$. Vi vet att för att två komplexa tal (a, b) och (c, d), skall vara lika krävs att $a = c$ och $b = d$. För att likheten skall gälla måste vi därför kräva att:

$$x^2 = x \text{ och } -1 = -2y.$$

Detta ger

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

och

$$-1 = -2y \Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Alltså, talparen som löser ekvationen är $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ och $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Exempel 3.9

Bestäm $x \in \mathbf{R}$ så att det komplexa talet $z = x^3+x^2i+(i-1)x-2i$ är

a) reellt

b) rent imaginärt.

Vi börjar med att skilja på de reella och de imaginära delarna:

$$z = x^3 + x^2i + (i-1)x - 2i = (x^3 - x) + (x^2 + x - 2)i.$$

a) Ett komplext tal $z = a + bi$ är reellt om $b = 0$. I detta exempel bör det alltså gälla att $x^2 + x - 2 = 0$. Vi löser denna andragradsekvation:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 1 \ \vee \ x = -2.$$

$\therefore$ Talet z är reellt om $x = 1 \vee x = -2$.

b) Det gäller att $z = a + bi$ är rent imaginärt då $a = 0$ och $b \neq 0$.

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1.$$

MEN: Här faller dock lösningen $x = 1$ bort, ty om $x = 1$ blir $b = 0$.

$\therefore$ Talet z är rent imaginärt om $x = 0 \vee x = -1$.

3.3 Konjugatet, division med komplexa tal

Ofta eftersträvar vi att skriva ett komplext tal på formen $a + bi$. Vi börjar med ett exempel:

Exempel 3.10

Skriv det komplexa talet $z = \frac{1}{1-i}$ på formen $a + bi$.

Vi angriper problemet genom att förlänga bråket med talet $1+i$. Då fås

$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2 - i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Vad vi gjorde här var att vi förlängde med något som kallas *konjugatet*. Om $z = a + bi$ kallar vi talet $a - bi$ för konjugatet. Vi kommer att märka att just konjugatet spelar en viktig roll när vi behandlar komplexa tal.

Definition 3.2 Det komplexa talet $z = a + bi$ har konjugatet $a - bi$. Konjugatet betecknas med $\bar{z}$.

Exempel 3.11

Konjugatet till

a) $z = 1 + \sqrt{5}i$ är $\bar{z} = 1 - \sqrt{5}i$

b) $z = -3i$ är $\bar{z} = 3i$

c) $z = -3$ är $\bar{z} = -3$.

Vi inser att "konjugatet på konjugatet" är samma som vårt ursprungliga uttryck, d.v.s $\bar{\bar{z}} = z$.

Exempel 3.12

Lös ekvationen $\bar{z} - \bar{\bar{z}} = i\bar{z} + 4$.

Vi börjar med att beteckna $z = \bar{\bar{z}} = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$. Vi sätter sedan in detta i ekvationen och får:

$$\begin{gathered}\bar{z} - \bar{\bar{z}} = i\bar{z} + 4 \Leftrightarrow (a - bi) - (a + bi) = i(a - bi) + 4 \Leftrightarrow \\ a - bi - a - bi = ai - bi^2 + 4 \Leftrightarrow \\ -2bi = ai + b + 4 \Leftrightarrow 0 - 2bi = (b + 4) + ai.\end{gathered}$$

Kravet för likhet ger

$$\begin{cases} 0 = b + 4 \\ -2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\therefore\ z = 8 - 4i.$$

En viktig egenskap som gäller för ett komplext tal och dess konjugat är att både summan och produkten är reella:

$$\begin{gathered}(a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbf{R} \\ (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}.\end{gathered}$$

Exempel 3.13

Bestäm

a) summan

b) produkten

c) kvoten

av det komplexa talet $z = \frac{1-i}{1+i}$ och dess konjugat.

Vi börjar med att skriva det komplexa talet på formen $a + bi$. Vi förlänger alltså med nämnarens konjugat:

$$z = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i - i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Detta ger

$$z = -i \Rightarrow \bar{z} = i.$$

och vi får

a)
$$z + \bar{z} = -i + i = 0$$

b)
$$z \cdot \bar{z} = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

c)
$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{-i}{i} = -1.$$

Exempel 3.14

Lös ekvationen $2z = i(z+1)$ och skriv lösningen i formen $a + bi$.

$$2z = i(z+1) \Leftrightarrow 2z = iz + i \Leftrightarrow z(2-i) = i \Leftrightarrow z = \frac{i}{2-i}.$$

Vi skriver om z och får

$$z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{2i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Exempel 3.15

Bestäm talet $a \in \mathbf{R}$ så att $\frac{a}{1-i} + \frac{1}{ai}$ är reellt.

Vi börjar med att skriva om uttrycket:

$$\frac{a}{1-i} + \frac{1}{ai} = \frac{a(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{1(0-ai)}{ai(0-ai)} =$$
$$\frac{a+ai}{1^2 - i^2} - \frac{ai}{-a^2 i^2} = \frac{a+ai}{2} - \frac{ai}{a^2} =$$
$$\frac{a}{2} + \frac{ai}{2} - \frac{i}{a} = \frac{a}{2} + \big(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\big)i.$$

För att detta ska vara reellt krävs att $\frac{a}{2} - \frac{1}{a} = 0$. Vi löser ekvationen och får

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

3.4 Det komplexa talplanet

Vi definierade komplexa tal utgående från talpar med vissa egenskaper. Vi sade att addition och multiplikation av dessa talpar måste ske på ett särskilt sätt. När vi har att göra med talpar ligger det nära till hands att sammankoppla dessa med planet. Det första talet i talparet (a, b) är ju den reella delen. Har vi att göra med planet motsvaras detta av x-koordinaten, b är den imaginära delen och motsvaras i planet av y-koordinaten. Vi skall se på ett exempel:

Exempel 3.16

Sök de punkter i det komplexa talplanet som motsvarar punkterna

a) -2

b) $2 + i$

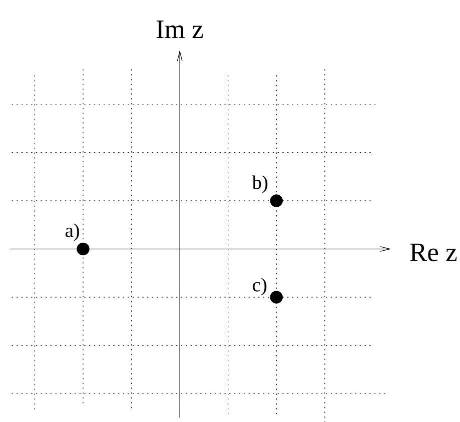
c) $2 - i$

Vi skriver om dessa i formen (a, b) för att sen kunna sätta in dem i ett koordinatsystem (se figur 3.1)

a) $-2 = -2 + 0i = (-2, 0)$

b) $2 + i = (2, 1)$

c) $2 - i = (2, -1)$



Figur 3.1:

Observera att för varje punkt i det komplexa talplanet kan man hitta en motsvarande ortsvektor[1]. Det komplexa talet $z = a + bi$ motsvaras av vektorn $a\vec{i} + b\vec{j}$. Addition och subtraktion med komplexa tal är jämförbart med addition och subtraktion av vektorer.

Vi skall nu definiera absolutbeloppet av ett komplext tal. Här har man hjälp av vektortolkningen.

Definition 3.3 Absolutbeloppet av det komplexa talet $z = a+bi$ är längden av ortsvektorn (a, b), d.v.s.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exempel 3.17

Beräkna absolutbeloppet av följande tal:
a) $2 - 3i$
b) $\sqrt{5}i$
c) a (OBS! $a \in \mathbf{R}$)

Vi använder oss av definitionen ovan och får:

a) $|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $|\sqrt{5}i| = |0 + \sqrt{5}i| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$

c) $|a| = |a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$

Vi ser alltså att absolutbeloppet av ett komplext tal är reellt. Detta är ju också förståeligt när man minns tolkningen av absolutbeloppet som längden av motsvarande vektor. Vi skall se på några egenskaper som gäller för absolutbelopp:

[1]Om vektorbegreppet är obekant kan man hoppa över denna tolkning

Egenskaper hos absolutbelopp för komplexa tal:

Tag de komplexa talen z, z_1 och z_2. Nu gäller att:

1. $$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2. $$|z| = |\bar{z}|$$

3. $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

4. $$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

5. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad z_2 \neq 0$$

6. $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{(triangelolikheten)}$$

Exempel 3.18

Bestäm $|z|$ då
$$z = \frac{3+4i}{2+i}.$$

$$|z| = \left|\frac{3+4i}{2+i}\right| \overset{5.}{=} \frac{|3+4i|}{|2+i|} \overset{3.}{=} \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5}.$$

Exempel 3.19

Visa att
$$z + \frac{4}{z}$$
är reellt, då $|z| = 2$.

Här kan vi utnyttja regel 3. Enligt den är $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Då gäller det att $z\bar{z} = |z|^2$. Vi förlänger och får

$$z + \frac{4}{z} = z + \frac{4\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{4\bar{z}}{|z|^2} = z + \frac{4\bar{z}}{2^2} = z + \bar{z}.$$

Vi har redan tidigare, i avsnitt 3.3, visat att $z + \bar{z} \in \mathbf{R}$ så saken är klar.

Exempel 3.20

Bestäm det komplexa talet z för vilket det gäller att $z = \bar{z}^2$.

Vi gör ansatsen $z = a+bi$. Detta innebär att $\bar{z} = a-bi$. Insättning ger

$$z = \bar{z}^2 \Leftrightarrow a + bi = (a - bi)^2 \Leftrightarrow a + bi = a^2 - 2abi + \underbrace{b^2 i^2}_{=-b^2} \Leftrightarrow$$
$$a + bi - a^2 + 2abi + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - a^2 + b^2) + (b + 2ab)i = 0.$$

Detta leder till att vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} a - a^2 + b^2 = 0 \\ b + 2ab = 0 \end{cases}$$

Från den senare ekvationen får vi att

$$b + 2ab = 0 \Leftrightarrow b(1 + 2a) = 0 \Leftrightarrow$$
$$b = 0 \ \vee 1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \ \vee \ b = 0.$$

Insättning av $a = \frac{1}{2}$ i den första ekvationen i ekvationssystemet ger

$$-\frac{1}{2} - \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + b^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Insättning av $b = 0$ ger

$$a - a^2 + 0^2 = 0 \Leftrightarrow a(1 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = 1.$$

Vi får alltså följande lösningar:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ z = 0 \ \vee \ z = 1.$$

Exempel 3.21

Skriv det komplexa talet

$$z = \frac{3+4i}{1+2\sqrt{2}i}$$

på formen $z = a + bi$, samt bestäm $|z|$.

Vi börjar med att skriva talet på formen $z = a + bi$:

$$z = \frac{3+4i}{1+2\sqrt{2}i} = \frac{(3+4i)(1-2\sqrt{2}i)}{(1+2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)} =$$
$$\frac{3-6\sqrt{2}i+4i-8\sqrt{2}i^2}{1-8i^2} = \frac{(3+8\sqrt{2})+(4-6\sqrt{2})i}{9} =$$
$$\frac{3+8\sqrt{2}}{9} + \frac{4-6\sqrt{2}}{9}i.$$

Nu ska vi ännu beräkna $|z|$:

$$|z| = \left|\frac{3+4i}{1+2\sqrt{2}i}\right| = \left|\frac{(3+8\sqrt{2})+(4-6\sqrt{2})i}{9}\right| =$$
$$\sqrt{\frac{(3+8\sqrt{2})^2+(4-6\sqrt{2})^2}{9^2}} =$$
$$\sqrt{\frac{(9+2\cdot 3\cdot 8\sqrt{2}+64\cdot 2)+(16-2\cdot 4\cdot 6\sqrt{2}+36\cdot 2)}{81}} =$$
$$\sqrt{\frac{9+48\sqrt{2}+128+16-48\sqrt{2}+72}{81}} = \sqrt{\frac{225}{81}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

3.5 Komplexa tal och reella tal

När vi behandlar reella tal är vi vana med att kunna ordna dem i storleksordning, $1 < 2 < 3 < 4$ osv. När vi behandlar komplexa tal går det inte. Vi kan t.ex. fråga oss om $i > 0$ eller $i < 0$. I båda fallen borde det gälla att $i^2 > 0$. Vi vet dock att $i^2 = -1$.

Detta ger upphov till följande sats:

Sats 3.4 *De komplexa talen kan inte ordnas i storleksordning.*

Vad vi kan jämföra är absolutbeloppet, som alltid är reellt. Detta motsvarar ju längden för motsvarande ortsvektor. Vi kan alltså jämföra avståndet till origo för en punkt i det komplexa talplanet.

3.6 Andragradsekvationer

När vi började behandla komplexa tal utgick vi från att vi saknade lösning till ekvationen $x^2 = -1$. Vi definierade då den imaginära enheten i som lösningen till den ekvationen. Vi skall i detta avsnitt i en vidare mening undersöka komplexa lösningar till andragradsekvationer.

Vi skall utgå från den lösningsformel vi har för andragradsekvationer med reella rötter:

Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har lösningen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vi har definierat diskriminanten D som $b^2 - 4ac$. Om $D > 0$ har vi två reella lösningar, om $D = 0$ har vi en dubbelrot och om $D < 0$ saknas reella lösningar.

Vi kommer i det här kapitlet att undersöka fallet $D < 0$, d.v.s. då diskriminanten är negativ. Kan vi då hitta komplexa lösningar till ekvationen? Vi skall börja med att undersöka specialfallet då $b = 0$.

Exempel 3.22

Undersök om ekvationen $z^2 + c = 0$ har lösningar i den komplexa talmängden. ($c > 0$)

En lösning måste vara av formen $a+bi$. Detta betyder att vi söker lösningar till ekvationen:

$$z^2 = -c \Leftrightarrow (a + bi)^2 = -c \Leftrightarrow (a^2 - b^2) - 2abi = -c + 0i.$$

För att denna likhet ska gälla måste

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -c \\ -2ab = 0 \end{cases}$$

Det senare kravet, $-2ab = 0$, ger att $a = 0 \vee b = 0$.

Vi sätter in dessa i den första och får

$$\begin{aligned} a = 0: &\quad 0^2 - b^2 = -c \Leftrightarrow b^2 = c \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{c}. \\ b = 0: &\quad a^2 - 0^2 = -c \Leftrightarrow a^2 = -c. \end{aligned}$$

Vi inser alltså att då $a = 0$ får vi enbart reella lösningar, men då $b = 0$ får vi däremot något som saknar reella lösningar. Vi får

$$a^2 = -c \Leftrightarrow a^2 = ci^2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{ci^2} = \pm i\sqrt{c}.$$

Det finns alltså två lösningar: $(a, b) = (0, \sqrt{c}) \vee (a, b) = (0, -\sqrt{c})$.

$\therefore$ Lösningarna till ekvationen $z^2 + c = 0$ ges av $z = 0 \pm i\sqrt{c}$.

Sats 3.5 *Ekvationen $z^2 = -c$, $c > 0$, har i den komplexa talmängden* $\boldsymbol{C}$ *lösningarna*

$$z = \pm i\sqrt{c}.$$

För andragradsekvationer härleder vi inte lösningsformeln, utan enbart presenterar den:

Sats 3.6 *Andragradsekvationen $az^2 + bz + c$, där a, b och c är reella har i den komplexa talmängden* $\boldsymbol{C}$ *lösningarna*

$$\begin{aligned} z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, &\qquad \text{om } b^2 - 4ac > 0 \text{ (två olika stora } \textbf{reella} \text{ rötter)} \\ z = \frac{-b}{2a}, &\qquad \text{om } b^2 - 4ac = 0 \text{ (en } \textbf{reell} \text{ dubbelrot)} \\ z = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, &\qquad \text{om } b^2 - 4ac < 0 \text{ (två olika stora } \textbf{imaginära} \text{ rötter)} \end{aligned}$$

När vi löser andragradsekvationer, och även tillåter komplexa lösningar, använder vi lösningsformel vi tidigare har haft.

Exempel 3.23

Lös ekvationen $2z^2 - 5z + 4 = 0$.

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{4} =$$
$$\frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Observera att uttrycket $\sqrt{-7}$ är odefinierat. Det är alltså inte matematiskt korrekt att skriva $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$. Vi gör det dock för enkelhetens skull. I.o.m. att $i^2 = -1$, kan man tänka sig att $i = \sqrt{-1}$ och därmed

$$\sqrt{-7} = \sqrt{(-1) \cdot 7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}.$$

Detta tillvägagångssätt är inte korrekt, men ger en intuitiv bild av hur man kommit fram till den formel som nämns i satsen ovan.

Vi kan också använda formeln ovan för ekvationer där koefficienterna inte är reella:

Exempel 3.24

Lös ekvationen $4z^2 - 5i - 1 = 0$.

Här är koefficienten framför förstagradstermen $-5i$. Insättning i lösningsformeln ger:

$$z = \frac{5i \pm \sqrt{25i^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 16}}{8} =$$
$$\frac{5i \pm \sqrt{-9}}{8} = \frac{5i \pm 3i}{8} \Rightarrow z = i \ \vee \ z = \frac{1}{4}i.$$

Anmärkning 3.7 Vi kan märka att komplexa lösningar till andragradsekvationer med reella koefficienter är varandras *konjugat*. Detta är dock inte fallet för lösningar till ekvationer med komplexa koefficienter. Jämför de båda exemplen!

Kapitel 4

Sannolikhetslära

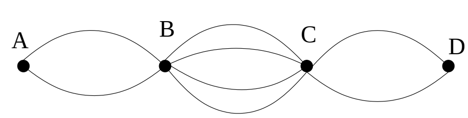
4.1 Kombinatorik

Vad är sannolikhetslära? Man kan allmänt säga att inom sannolikhetsläran försöker man beräkna chanser eller risker. Det kan sedan vara fråga om chansen att vinna på lotto eller risken att insjukna i en viss sjukdom. För att kunna beräkna olika sannolikheter krävs att man kan beräkna antalet möjligheter som kan uppkomma. I det här avsnittet jobbar vi med *kombinatorik*. Vi har olika regler vi kan följa, och vi skall nu se på några av dem.

Multiplikationsprincipen

Exempel 4.1

Man vill komma från staden A till staden D via städerna B och C. Mellan A och B går 2 vägar, mellan B och C går 4 vägar och mellan C och D går 2 vägar. Hur många olika rutter kan man välja mellan A och D?



Figur 4.1:

Situationen finns uppritad i figur 4.1. Från A till B kan man välja två olika rutter. Mellan B och C kan man välja fyra olika rutter och från C till D kan man välja mellan två rutter. Antalet olika rutter mellan A och D är därför $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

Sats 4.1 *Om man står inför en serie valsituationer numrerade* $1, 2, \ldots, n$ *med* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *valmöjligheter, är det totala antalet valmöjligheter* $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$*. Om man har* n *stycken valsituationer, med* k *valmöjligheter var, är det totala antalet valmöjligheter* k^n*.*

Exempel 4.2

Hur många olika stryktipsrader kan man tippa?

Den som tippar gör 13 val. I varje val har han tre möjligheter, 1,X eller 2. Antalet kombinationer är:

$$3^{13} = 1594323.$$

Val med hänsyn till ordningen

Exempel 4.3

På hur många sätt kan 6 personer placeras i en kö?

Den första personen i kön kan väljas på 6 olika sätt, den andra kan väljas på 5 olika sätt, den tredje på 4 olika sätt, den fjärde på 3 olika sätt, den femte på 2 olika sätt och den sista på ett sätt. Antalet möjligheter blir enligt multiplikationsprincipen:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ olika sätt.}$$

Allmänt kan man resonerna på samma sätt för n personer. Den första kan väljas på n olika sätt, den andra på $n - 1$ olika sätt osv. Antalet möjligheter är: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Det är ju ganska opraktiskt att varje gång behöva skriva ut hela uttrycket och därför har man infört följande definition:

Definition 4.2 Med $n!$ avses för alla icke-negativa naturliga tal n:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Ytterligare har man definierat

$$0! = 1.$$

$n!$ utläses "n fakultet".

Vi skall ge några intuitiva förklaringar på ord som ofta kommer att dyka upp inom kombinatoriken och sannolikhetsläran. I kursen Propedeutisk matematik I definierade vi begreppen *element* och *mängd*. I det ovanstående exemplet kallas en person ett element. Gruppen på 6 personer räknar vi som en mängd. Att placera element ur en mängd i en *bestämd ordning*, eller som vi gjorde, placera personer ur en grupp i en bestämd ordning, kallas att bilda en *permutation*.

Sats 4.3 *Antalet permutationer av en mängd bestående av n element är $n!$*

Låt oss ta ett exempel:

Exempel 4.4

> Styrelsen i en föreningen består av ordförande, viceordförande, kassör, sekreterare och informationsansvarig.
>
> a) I år har 5 personer blivit invalda till styrelsen. På hur många olika sätt kan de fördela posterna mellan sig?
>
> b) På hur många sätt kan de båda ordförandeposterna fördelas mellan de 5 invalda?
>
> a) Posterna kan fördelas på 5! olika sätt, detta med stöd av ovanstående sats. Alltså kan de fördelas på
>
> $$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ olika sätt.}$$
>
> b) Till den första posten, ordförande, väljs en person av de 5 invalda och till den andra, viceordförande, kan man välja mellan de 4 återstående personerna. Antalet permutationer är $5 \cdot 4 = 20$.

Vi skall nämna resultatet i *b)* i en sats. Vi såg ju på antalet permutationer då vi valde 2 element ur en mängd med 5 element.

Sats 4.4 *Antalet permutationer om k element ur en mängd med n element är:*

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

I b)-fallet exempel ovan var ju $k = 2$ och $n = 5$. Detta ger att antalet permutationer är

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5\cdot 4 = 20.$$

Exempel 4.5

Vid en busshållplats står 5 kvinnor och 4 män. På hur många sätt kan dessa människor ställa sig

a) i en kö

b) i en kö så att kvinnorna står först

c) i en kö så att varannan person är en kvinna och varannan en man?

a) De är totalt 9 personer som ska placeras i en kö. Detta kan ske på $9! = 362880$ olika sätt.

b) Kvinnorna kan ställa sig i kön på 5! olika sätt, männen på 4!. Antalet olika köer blir då, enligt multiplikationsprincipen, $5!\cdot 4! = 2880$.

c) I och med att kvinnorna är fler vet vi att en kvinna måste stå först i kön för att det ska vara möjligt att varannan person är en kvinna och varannan en man. Kvinnorna kan även nu ordnas på 5! sätt och männen på 4! olika sätt. Svaret är alltså även här $5!\cdot 4! = 2880$.

Val utan hänsyn till ordningen

Exempel 4.6

Inom en förening skall man bilda en kommitté. Till denna skall två representanter från styrelsen i exempel 4.4 väljas. På hur många sätt kan detta ske?

> Detta är inte samma exempel som i 4.4*b*) ovan. Här är det ju bara fråga om att välja två personer av fem, den inbördes ordningen mellan dem spelar ingen roll. I exempel *b*) bildade varje par av personer två olika kombinationer, då person ett kunde vara ordförande och person två viceordförande, och vice versa. Rimligtvis borde antalet kombinationer vara hälften så många som om man tar hänsyn till ordningen. Detta betyder att två personer skulle kunna väljas till kommittéen på 10 olika sätt.

Allmänt kan vi resonera likadant. Skall vi välja k element ur en mängd på n element utan hänsyn till ordningen går det till på följande sätt:

Om man väljer med hänsyn till ordningen fick vi:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \text{ olika permutationer.}$$

I detta antal ingår dock $k!$ sätt, som endast skiljer sig ifrån varandra i fråga om de utvaldas inbördes ordning. Vi måste därför dividera uttrycket ovan med $k!$ för att rätta till detta. Vi kan alltså välja k element ur en mängd med n element *utan hänsyn till ordningen* på

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olika sätt.

Detta brukar betecknas på ett speciellt sätt:

Definition 4.5 Med

$$\binom{n}{k},$$

(utläses "n över k") avses för de naturliga talen n och k ($n > 0$ och $k \leq n$):

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vi brukar kalla en följd utan bestämd ordning för en *kombination* (jfr. permutation).

Sats 4.6 *Antalet kombinationer om k element av en mängd med n element är:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exempel 4.7

I en klass finns 11 pojkar och 15 flickor. Klassen har 8 lärare. För att ordna en klassresa väljs en kommitté, som består av 3 pojkar, 4 flickor och 4 lärare. På hur många olika sätt kan kommittéen väljas?

Pojkarna kan väljas ut på $\binom{11}{3}$ sätt, flickorna på $\binom{15}{4}$ sätt och lärarna kan väljas på $\binom{8}{4}$ sätt.

Alla dessa grupper kan man kombinera fritt. Det betyder att det totala antalet sätt man kan välja kommittéen på är:

$$\binom{11}{3} \cdot \binom{15}{4} \cdot \binom{8}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$\frac{54486432000}{3456} = 15765750.$$

I exemplet ovan kan varje person bara väljas en gång. T.ex för pojkarna gäller att den första personen kan väljas på 11 sätt, nästa på 10 (ty personen som valdes först kan inte väljas igen) o.s.v. I exemplet nedan kan däremot siffrorna väljas på nytt. Om vi exempelvis får en sjua som första siffra är det möjligt att även den andra siffran är en sjua. Detta brukar kallas att man väljer *med återläggning*. Om varje siffra bara kunde väljas en gång heter det att man väljer *utan återläggning*.

Exempel 4.8

I Jokerspelet utlottas ett sjusiffrigt tal. Varje siffra är något av talen $0, 1, \ldots, 8, 9$. Hur många olika tal kan lottas ut i Jokerspelet?

Varje siffra kan väljas på 10 olika sätt. Vi får alltså att $10^7 = 10000000$ olika tal kan lottas ut.

4.2 Empirisk sannolikhet

Vad menas med sannolikhet? Vi skall se på ett klassiskt exempel:

Exempel 4.9

Vi tänker oss att vi kastar tärning. När vi kastar en tärning kan vi få upp antingen 1, 2, 3, 4, 5 eller 6. Vi tänker oss att vi har en symmetrisk tärning. Detta leder till att chansen att få upp en etta är lika stor som chansen att få upp en sexa.

Vi skall nu göra ett *empiriskt försök* (ett experimentellt försök). Vi skall kasta en tärning n antal gånger och se hur stor procent av kasten som visar 1, 2 osv. Deras procentuella andel kallas *den relativa frekvensen*.

I följande försök har jag simulerat tärningskast med $n = 100$, $n = 500$, $n = 1000$ och $n = 10000$:

	100	500	1000	10000
1	0,1900	0,1760	0,1720	0,1674
2	0,2000	0,1800	0,1610	0,1674
3	0,1200	0,1800	0,1750	0,1631
4	0,1800	0,1620	0,1580	0,1662
5	0,1900	0,1500	0,1690	0,1685
6	0,1200	0,1520	0,1650	0,1675
Summa	1	1	1	1,0001

Den teoretiska sannolikheten för att få en etta när man kastar en tärning är:

$$\frac{1}{6} = 0,1667.$$

Vi ser att med större antal kast kommer vi i regel närmare det talet. Vi ser också att skillnaden mellan den största relativa frekvensen och den minsta relativa frekvensen minskar med större antal tärningskast. Sannolikheterna närmar sig varandra, vilket vi också kan se ur tabellen.

Detta ger upphov till följande sats:

Sats 4.7 *Antag att A är en bestämd händelse, som ansluter sig till ett slumpmässigt försök. Försöket utförs n gånger och antalet försök som leder till att A inträffar antas vara $n(A)$. Om den relativa frekvensen visar sig vara stabil, d.v.s. om den varierar kring ett bestämt tal och närmar sig detta tal allteftersom antalet försök ökar, sägs talet vara den empiriska sannolikheten för händelsen A. Vi betecknar talet (d.v.s. den empiriska sannolikheten) $P(A)$ och skriver:*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

4.3 Det klassiska sannolikhetsbegreppet

Vi har definierat sannolikheten utgående från empirisk sannolikhet. Med empirisk sannolikhet menade vi den sannolikhet man får fram genom upprepade försök av samma experiment. Vi experimenterade och simulerade kast med en tärning. Denna definition saknar dock en del. Hela definitionen bygger på experiment, som kan få olika utfall beroende på förhållanden i experiementet osv. Vi skall därför bygga upp en mer matematisk hållbar modell.

Först måste vi definiera en del begrepp. De olika resultat eller utfall man kan få vid ett försök kallar vi *elementarhändelser*. Alla möjliga elementarhändelser bildar en mängd. Den mängden kallar vi ett *utfallsrum*. Det betyder att de olika resultat man kan få vid ett försök kallas ett utfallsrum. Vi betecknar utfallsrummet med stor bokstav, ex. U. Om vi ser på en delmängd av utfallsrummet kallar vi detta för en *händelse*.

Exempel 4.10

I vårt exempel med kast med tärningar var elementarhändelserna 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Tillsammans bildade de utfallsrummet $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Utfallsrummet är alltså mängden av elementarhändelser.

Om vi kastar en tärning och undersöker hur ofta vi får 5 eller 6, då undersöker vi hur ofta händelsen $\{5, 6\}$ inträffar. Händelsen är en delmängd av utfallsrummet.

Nu när vi har definierat endel grundbegrepp kan vi gå över till att definiera begreppet *sannolikhet*.

Definition 4.8 Antag att U är en (ändlig) mängd, som består av möjliga utfall vid ett slumpmässigt försök, och att A är en godtycklig händelse, så att $A \subset U$. *Sannolikheten för händelsen* A, d.v.s sannolikheten för att resultatet av försöket skall vara ett element i A är då:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U).}$$

Den klassiska sannolikheten för en händelse är således *"Kvoten av antalet gynnsamma utfall och antalet möjliga utfall."*

Exempel 4.11

Vi undersöker försöket "dra ett kort ur en vanlig kortlek" och händelserna:

a) det dragna kortet är spader

b) det dragna kortet är rött

c) det dragna kortet är en knekt, en dam eller en kung.

Enligt vår definition ovan skall vi dividera antalet gynnsamma utfall med antalet möjliga utfall för att få sannolikheten. $n(U)$, d.v.s. antalet möjliga utfall är 52, eftersom vi kan få 52 olika kort när vi drar ett kort ur en kortlek.

a) Vi ser på händelsen att kortet är spader: Det finns 13 möjliga elementarhändelser som satisfierar denna händelse (d.v.s. de 13 spaderkorten). Sannolikheten är således:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

b) För händelsen att vi får ett rött kort har vi att $n(A) = 26$. Detta leder till att:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

c) För händelsen att vi får en knekt, en dam eller en kung har vi att $n(A) = 12$. Vi får:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

När vi drar ett kort ur en kortlek tänker vi oss att det är lika stor sannolikhet att dra vilket kort som helst. Detta kallas *likformig sannolikhetsfördelning* och används alltid när man räknar med den klassiska sannolikheten. Vi kommer senare att gå in på möjligheten att olika elementarhändelser inträffar med olika stor sannolikhet.

Att vi har att göra med en likformig sannolikhetsfördelning förstår vi av att man "slumpmässigt" drar ett kort. Man kan också förstå det utgående från problemets natur.

Exempel 4.12

Bestäm sannolikheten att få poängsumman 7 eller 8 vid kast med två tärningar.

Vilket är utfallsrummet? Jo, U består av olika talpar (x, y) som man kan få när man kastar två tärningar. Vi kan bilda U som:

$$U = \{(1,1), (1,2), \ldots, (2,1), (2,2), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}.$$

Om vi ser på:

$A =$"poängsumman 7 eller 8 vid kast med två tärningar"

får vi att det gynnsamma utfallet är:

$$A = \{(1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), \\ (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2)\}$$

Alltså, $n(A) = 11$ och $n(U) = 36$ vilket ger

$$P(A) = \frac{11}{36}.$$

Exempel 4.13

Ur en kortlek dras 5 kort. Vad är sannolikheten att alla 5 är spaderkort?

Vi skall nu se på händelsen $A =$ "5 kort dras och alla är spader".

Utfallsrummet U är alla kombinationer av kort som vi kan få när vi drar fem kort. En elementarhändelse är t.ex.

$u_1 = \{\textit{spader 4, klöver 6, hjärter kung, hjärter knekt, klöver 9}\}.$

Antalet elementarhändelser, $n(U)$, är enligt de regler vi lärde oss i avsnittet om kombinatorik

$$n(U) = \binom{52}{5}.$$

Händelsen A innefattar alla händelser sådana att de fem korten är spader. Hur många sådana kombinationer finns det? $n(A)$, som är antalet gynnsamma kombinationer ges av:

$$n(A) = \binom{13}{5}$$

Sannolikheten $P(A)$ ges nu av

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{13!}{5! \cdot (13-5!)} \cdot \frac{5! \cdot (52-5)!}{52!} =$$
$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0,000495.$$

Alltså, chansen att alla fem är spaderkort är under $0,1\%$!

Exempel 4.14

Dra fem kort ur en kortlek. Vilken är sannolikheten att exakt tre av dem är spader?

Antalet spaderkombinationer som vi kan bilda med tre kort är $\binom{13}{3}$. De två kort som inte ska vara spader kan kombineras på $\binom{39}{2}$ olika sätt. Detta eftersom det finns 39 icke-spaderkort och vi väljer två stycken av dem. Dessa kombinationer av spaderkort och icke-spaderkort kan fritt varieras. Eftersom antalet kombinationer då fem kort väljs ur en packe är $\binom{52}{5}$ är sannolikheten att få exakt tre spaderkort när man på måfå väljer fem kort ur en packe:

$$\frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,0815.$$

4.4 Räkneregler

Vi skall nu bilda och härleda några regler, utgående från den klassiska sannolikhetsdefinitionen.

Regler:

Vi antar att A och B är händelser i utfallrummet U. Då gäller:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.

   Bevis:
   $$0 \leq n(A) \leq n(U) \Leftrightarrow$$
   $$\frac{0}{n(U)} \leq \frac{n(A)}{n(U)} \leq \frac{n(U)}{n(U)} \Leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. $P(U) = 1, \qquad P(\emptyset) = 0.$

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om $A \cap B = \emptyset$

   Bevis: $n(A) = h$ och $n(B) = k$ och något element i A finns inte i B. Mängden $A \cup B$ innehåller då $h + k$ element.

   $$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{h+k}{n(U)} = \frac{h}{n(U)} + \frac{k}{n(U)} =$$
   $$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} = P(A) + P(B).$$

Utgående från regel 2 brukar man tala om att sannolikheten för en *omöjlig händelse* är 0 och sannolikheten för en *säker händelse* är 1.

Vi skall ta ett exempel på räkneregel 3:

Exempel 4.15

Vad är sannolikheten att få samma sida upp tre gånger efter varann när man singlar slant?

Man kastar alltså ett mynt. Vad är sannolikheten att få $\{$*krona, krona, krona*$\}$ eller $\{$*klave, klave, klave*$\}$?

Vi har 8 möjliga utfall (varför?). Två av dessa är:

A =$\{krona,\ krona,\ krona\}$ och

B =$\{klave,\ klave,\ klave\}$.

A och B innehåller inga likadana element. Det finns ett element i A och ett element i B. Sannolikheten blir alltså:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Vi skall fortsätta med ytterligare några regler:

Regler:

Antag att A och B är händelser i utfallsrummet U. Då gäller:

1. $P(U \setminus A) = P(A^C) = 1 - P(A)$,

   d.v.s. sannolikheten för komplementhändelsen A^C är 1 minus sannolikheten för A.

2. Antag att $A \subset B$. Då gäller:

   $$P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$$

   d.v.s. sannolikheten för händelsen B minus händelsen A, där A är en undermängd till B, är sannolikheten för B − sannolikheten för A.

3. För alla händelser $A, B \subset U$ gäller:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

   Bevis: Antag att det finns h element i A, k element i B och j element i $A \cap B$. ($j \leq h, k$) Då fås

   $$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} =$$
   $$\frac{h + k - j}{n(U)} = \frac{h}{n(U)} + \frac{k}{n(U)} - \frac{j}{n(U)} =$$
   $$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exempel 4.16

En lottförsäljare har 100 lotter, varav 5 ger vinst. En person köper 2 lotter. Vad är sannolikheten att han får åtminstone en vinst?

Komplementhändelsen är här att han inte får någon vinst. *Det är i många fall mer praktiskt att räkna ut sannolikheten för komplementhändelsen.*

A ="åtminstone en vinst"

A^C="ingen vinst".

Det gäller att $P(A) = 1 - P(A^C)$.

Sannolikheten att inte få vinst med den första lotten är $\frac{95}{100}$, eftersom det finns 95 lotter som inte ger vinst och sammanlagt 100 lotter.

Sannolikheten att få en nitlott även i den andra omgången är $\frac{94}{99}$, eftersom det finns 94 nitlotter och totalt 99 lotter kvar.

Då fås:

$$P(A^C) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} = 0,902$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0,902 = 0,098.$$

Denna sannolikhet kunde även ha beräknats som:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{95}{2}}{\binom{100}{2}}.$$

Exempel 4.17

Beräkna $P(A \cap B)$ då $U = A \cup B$, $P(A) = 0,8$ och $P(B) = 0,5$.

Direkt insättning i formeln $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ger att:

$$1 = 0,8 + 0,5 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,3.$$

4.5 Oberoende händelser

Vi skall i de följande avsnitten gå in på vissa specifika sannolikhetsproblem. Det är ofta till just dessa man kommer tillbaka när man vill ha löst något problem. Det första begreppet är *"oberoende händelse"* som introduceras med hjälp av ett exempel.

Exempel 4.18

> Ett kort dras ur en kortlek. Med vilken sannolikhet är kortet spader äss?
>
> Svaret är som bekant $\frac{1}{52}$, ty det är endast 1 av totalt 52 kort som "duger".
>
> Vi kunde också tänka oss tillvägagånssättet:

$$P(\text{“}spader\text{”}) \cdot P(\text{“}äss\text{”}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52} = P(\text{“}spader\ äss\text{”}).$$

Vi kan fråga oss om detta är en allmän regel eller om det är en tillfällighet. När vi definierar begreppet oberoende händelser utgår vi från just detta. Om två händelser är oberoende av varandra betyder det att sannolikheten att båda händelserna skall inträffa är sannolikheten att den ena händelsen skall inträffa gånger sannolikheten att den andra händelsen skall inträffa. Vi sammanfattar i en definition:

Definition 4.9 Antag att A och B är händelser i utfallsrummet U. Om händelserna är *oberoende*, gäller:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Detta betyder i klarspråk: information om att den ena har inträffat påverkar inte sannolikheten för den andra händelsen att inträffa.

Definitionen kan i det allmänna fallet gälla mer än två händelser.

Exempel 4.19

> Tre bowlare slår strike med sannolikheten 50%, 60% respektive 70%. Vilken är sannolikheten för minst en strike om alla slår en gång?

Vi ser på händelsen:

$A =$"minst en strike".

Komplementhändelsen A^c är den att "ingen slår en strike". Vi skall se på denna:

De tre bowlarnas resultat är oberoende av varandra och vi får

$P(A^c) = (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,06.$

$$\therefore \quad P(A) = 1 - 0,06 = 0,94.$$

4.6 Oberoende försök

Begreppet "oberoende försök" ligger mycket nära "oberoende händelse". När vi definierade oberoende händelse utgick vi från två händelser i samma utfallsrum U. När vi definierar oberoende försök utgår vi från händelser i olika utfallsrum. Om dessa händelser inte påverkar varandra talar vi om *"oberoende försök"*.

Definition 4.10 Antag att e är en godtycklig händelse i utfallsrummet E och f är en godtycklig händelse i utfallsrummet F samt att E och F är utfallsrum i två *oberoende försök*. Då gäller:

$$P(e \cap f) = P(e) \cdot P(f).$$

Exempel 4.20

Vi singlar först slant och kastar sedan en tärning. Vilken är sannolikheten att få en klave och en 5:a eller en 6:a?

Vi har två utfallsrum, som definieras som:

$E = \{krona,\ klave\}$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

De händelser vi ser på kallar vi e och f:

$e = \{klave\}$
$f = \{5, 6\}$.

Sannolikheten att få klave och en 5:a eller en 6:a fås (eftersom försöken görs oberoende av varandra) som:

$$P(e \cap f) = P(e) \cdot P(f) = \frac{n(e)}{n(E)} \cdot \frac{n(f)}{n(F)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Vi kunde också tänka oss att försöken skulle vara beroende av varandra. Ett exempel vore om vi ser på väderleken. Vi kan tänka oss att vi undersöker hur stor sannolikheten är att Aura å är frusen och sannolikheten att vi har kallare än tio minusgrader i Åbo. Utfallet i dessa två försök är rimligtvis beroende av varandra. Ser vi på sannolikheten att Aura å är frusen och det är kallare än tio minusgrader gäller inte sambandet:

P(“frusen å och kallare än -10”)$=$ P(“frusen å”)$\cdot$$P$(“kallare än -10”).

Exempel 4.21

Vi singlar slant n gånger. Vilken är sannolikheten att klave förekommer åtminstone en gång?

Vi kan se på varje slantsingling som ett oberoende försök. Detta eftersom resultatet av ett kast inte är beroende av föregående kast.

Komplementhändelsen till åtminstone en klave är att vi inte får en enda klave. Vi sätter:

A^C =”bara kronor när vi singlar slant n gånger”.

Denna räknas ut som:

$$P(A^C) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sannolikheten för "åtminstone en klave", $P(A)$, ges då av:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

4.7 Addition och multiplikation av sannolikheter

Exempel 4.22

Tre kort dras ur en kortlek. Vilken är sannolikheten att det första och det tredje kortet är spader? Vilken är sannolikheten att exakt två kort är spader?

Vi vet att när man drar ett kort får man antingen ett spaderkort eller så får man inte det.

Om vi inför beteckningarna:

$S =$*"spader"*

$A =$*"annat kort"*

gäller det att vi skall få kombinationen SAS. Sannolikheten för denna händelse är:

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{12}{50} = 0{,}0459.$$

Om vi istället anlayserar sannolikheten att exakt två kort är spader, ser vi att följande kombinationer är godtagbara:

SSA, SAS, ASS.

Dessa händelser är tydligen uteslutande av varandra. Vi vet att $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ om händelserna är uteslutande. Vi får:

$$P(SSA) + P(SAS) + P(ASS) =$$
$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50} + \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{12}{50} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \approx 0{,}138.$$

Att veta när man skall addera eller multiplicera sannolikheter är inte alltid så lätt. En regel är att när ordet "och" nämns så handlar det ofta om multiplikation, medan ordet "eller" oftare kan associeras till addition. Dessutom så gäller att $\cup$ hör ihop med addition medan $\cap$ hör ihop med multiplikation.

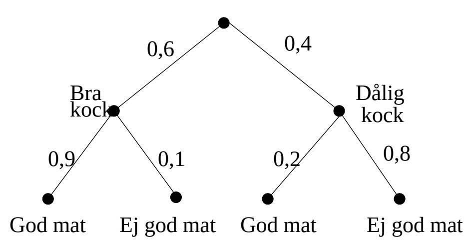
Sannolikheten att händelsen A *och* händelsen B inträffar är $P(A) \cdot P(B)$ om de är oberoende. Sannolikheten att händelsen A *eller* händelsen B inträffar är $P(A) + P(B)$, om A och B är oberoende av varandra.

Ett gott råd när man skall lösa sannolikhetsproblem är att rita upp alla möjligheter på ett papper, samt att noggrannt tänka igenom uppgiften. Inom sannolikhetsläran lönar det sig aldrig att ha bråttom!

Exempel 4.23

Sannolikheten att en bra kock gör god mat är 90% och sannolikheten att en dålig kock gör god mat är 20%. En kock väljs på måfå ur en grupp med 60% bra kockar och 40% dåliga. Vad är sannolikheten att den valda kocken lagar god mat?

Vi har två typer av kockar och två typer av mat. Genom att kombinera dem på olika sätt kan vi få olika mat. Situationen finns uppritad i figur 4.2.



Figur 4.2:

För att få god mat kan vi alltså antingen ha en dålig kock som gör god mat *eller* en bra kock som gör god mat. Vi får:

$P(\text{“}god\ mat\text{”}) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,9 = 0,62.$

Exempel 4.24

I urna A finns fyra röda och tre vita kulor och i urna B finns fem röda och sex vita kulor. En kula tas ur A och sätts i B. Därefter dras fyra kulor ur B. Vilken är sannolikheten att alla dessa är vita?

Antingen dras en vit eller en röd kula ur A:

$P(\text{"vit kula"}) = \frac{3}{7}$

$P(\text{"röd kula"}) = \frac{4}{7}$

I urna B finns nu 12 kulor. Om vi flyttat en röd kula till B så finns det sex röda och sex vita kulor i B. Om vi flyttat en vit kula till B finns det fem röda och sju vita kulor i B. Sannolikheten att alla fyra kulor vi sedan drar ur B är vita är

$$P(\textit{fyra vita}) = P(\textit{vit dras ur } A) \cdot P(\textit{fyra vita dras ur } B) +$$
$$P(\textit{röd dras ur } A) \cdot P(\textit{fyra vita dras ur } B) =$$
$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0,04762.$$

Exempel 4.25

På Anders skolväg finns två trafikljus som oberoende av varann visar rött 70% och 40% av tiden. Vilken är sannolikheten att

a) båda visar rött

b) ingetdera visar rött

c) exakt ett visar rött

d) åtminstone ett visar rött

då Anders kommer till trafikljusen?

a) $P(\text{"båda visar rött"}) = P(\text{"första visar rött"}) \cdot P(\text{"andra visar rött"}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,28.$

b) $P(\text{"ingetdera visar rött"}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0,18.$

c) P(*"exakt ett visar rött"*)$=$ P(*"första visar rött, andra grönt eller första visar grönt, andra rött"*)$= \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,54$.

d) P(*"åtminstone ett visar rött"*)$= 1 - P$(*"inget visar rött"*)$= 1 - 0,18 = 0,82$.

4.8 Binomialsannolikhet

Vi tänker oss att vi gör ett försök n gånger. Vi är intresserade av händelsen A som inträffar med sannolikheten $P(A) = p$.

Antingen inträffar händelsen A i ett försök eller så gör den det inte. Sannolikheten att händelsen A inte skall inträffa är $(1 - p)$.

Vi undersöker den speciella händelsen att A inträffar k gånger på n försök. Antag att $k = 0$, d.v.s. att händelsen A inte alls inträffar. Sannolikheten för detta är $(1-p)^n$. Sannolikheten att händelsen A inträffar i varje försök är p^n.

Vi kan beskriva vilka k stycken gånger A inträffar genom att välja en delmängd med k stycken element ur mängden $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. På hur många olika sätt kan dessa delmängder väljas? Hur många kombinationer av k element kan vi välja ur en mängd på n element? Jo, enligt satsen i avsnitt 4.1 kan delmängderna väljas på

$$\binom{n}{k} \text{ olika sätt.}$$

Vi skall se på fallet att A inträffa i de k första försöken men inte sedan. Eftersom vi har n försök allt som allt gäller det att sannolikheten för detta är:

$$p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Detta är också sannolikheten för varje händelseserie som innebär att A inträffar k gånger. Eftersom antalet kombinationer är $\binom{n}{k}$ så är sannolikheten att A skall inträffa exakt k gånger:

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Sats 4.11 *Ett försök, där händelsen A inträffar med sannolikheten p, utförs n gånger så, att försöken är oberoende av varandra. Om A_k står för händelsen att "A inträffar exakt k gånger på dessa n försök", $0 \leq k \leq n$, gäller det att:*

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Denna sats kallas satsen om binomialsannolikhet.

Exempel 4.26

Sannolikheten att det regnar en viss dag är $0,2$. Vad är sannolikheten att det regnar två dagar under en vecka? Vilken är sannolikheten att det regnar på måndag och fredag?

Vi antar att händelsen "det regnar" är oberoende av om det regnat föregående dag.

Sannolikheten att det regnar två dagar under en vecka ges enligt satsen ovan av:

$$\binom{7}{2} 0,2^2 (1-0,8)^{7-2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5 = 0,275.$$

Sannolikheten att det regnar en viss dag är $0,2$. Därför är sannolikheten att det regnar på måndag och fredag (händelserna oberoende):

$$0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

Exempel 4.27

Sannolikheten att ett frikast i korgboll lyckas antas vara 80%. Beräkna sannolikheten att åtminstone 3 av 5 frikast lyckas.

Vi skall fundera på problemet lite. Att åtminstone 3 av 5 kast lyckas betyder att 3, 4 eller 5 kast lyckas. Dessa händelser är uteslutande, för man kan ju inte lyckas 4 gånger samtidigt som man lyckas 3 gånger.

Vi betecknar:

A_k ="lyckas k gånger på 5 kast".

Då fås

$$P(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) =$$
$$\sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \cdot 0,8^k \cdot (1-0,8)^{5-k} =$$
$$\binom{5}{3} 0,8^3 0,2^2 + \binom{5}{4} 0,8^4 0,2^1 + \binom{5}{5} 0,8^5 0,2^0 =$$
$$0,2048 + 0,4096 + 0,3277 \approx 0,94.$$

Exempel 4.28

Vilken är sannolikheten att krona uppträder för andra gången i det sista kastet om man singlar slant fem gånger?

Vi skall behandla detta som två oberoende försök. I det första försöket undersöker vi händelsen att få en krona när man singlar slant fyra gånger. I det andra försöket undersöker vi sannolikheten för händelsen krona. Dessa försök är oberoende av varandra och därför fås sannolikheten som:

$$P(\text{“}\textit{en krona på fyra försök}\text{”}) \cdot P(\text{“}\textit{krona}\text{”})$$
$$= \tbinom{4}{1} 0,5^1 0,5^3 \cdot 0.5 = 0,125.$$

Exempel 4.29

Hur många barn bör det finnas i en familj för att sannolikheten skall vara $\geq \frac{3}{4}$ att åtminstone två av barnen är pojkar? Vi tänker oss att sannolikheten för pojke och flicka är lika stor.

Komplementhändelsen till "åtminstone två pojkar" är "ingen eller en pojke". Sannolikheten för denna händelse är $1 - P(\text{“}\textit{åtminståne två pojkar}\text{”})$.

$$P(\text{“}\textit{åtminstone två pojkar}\text{”}) = 1 - P(\text{“}\textit{ingen eller en pojke}\text{”}) \geq \tfrac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$1-\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}\cdot 0,5^k\cdot 0,5^{n-k}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$1-\left(\binom{n}{0}\cdot 0,5^0\cdot 0,5^{n-0}+\binom{n}{1}\cdot 0,5^1\cdot 0,5^{n-1}\right)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$1-(1\cdot 0,5^n+n\cdot 0,5^n)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$1-\frac{3}{4}\geq 0,5^n(1+n)\Leftrightarrow 0,5^n(1+n)\leq\frac{1}{4}.$$

Denna ekvation är inte lätt att lösa explicit, men vi kan pröva med olika värden och se vad vi får. Eftersom vi undersöker sannolikheten för åtminstone två pojkar börjar vi med $n = 2$:

$$n=2\Rightarrow(1+n)\cdot 0,5^n=3\cdot 0,5^2=0,75$$
$$n=3\Rightarrow 4\cdot 0,5^3=0,5$$
$$n=4\Rightarrow 5\cdot 0,5^4=0,3125$$
$$n=5\Rightarrow 6\cdot 0,5^5=0,1875<0,25=\frac{1}{4}$$

Vi drar alltså konklusionen att om vi har fem barn eller fler så är sannolikheten att vi har åtminståne två pojkar större än 75%.

4.9 Stokastisk variabel

I förra avsnittet beräknade vi binomialsannolikheter. I det här avsnittet kommer vi att bredda oss lite.

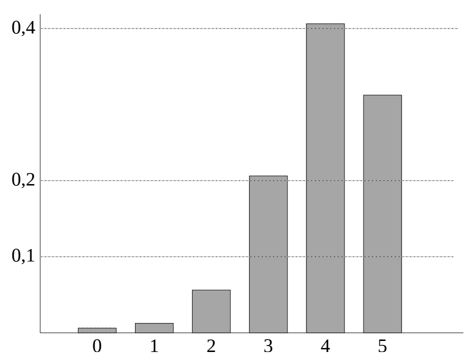
Vi tänker oss att vi kastar pil på en piltavla. Sannolikheten att träffa tavlan är $0,8$ och sannolikheten för en miss är $0,2$. Om vi antar att vi har n pilar och vi vill undersöka sannolikheten för k träffar, kan vi få denna sannolikhet som:

$$\binom{n}{k}\cdot 0,8^k\cdot 0,2^{n-k}.$$

Antag nu att vi vill undersöka sannolikheten för att få 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 träffar då vi har 5 pilar. Vi skall se på denna:

$$\binom{5}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^5 = 0,00032$$
$$\binom{5}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4 = 0,0064$$
$$\binom{5}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512$$
$$\binom{5}{3} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048$$
$$\binom{5}{4} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 = 0,4096$$
$$\binom{5}{5} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,3277.$$

Om vi summerar de olika sannolikhterena kommer vi till 1. Detta är ju ganska naturligt, eftersom vi har täckt alla möjligheter, d.v.s. hela utfallsrummet. När vi kastar med 5 pilar kan vi få $0-5$ träffar. Vi ritar upp ett stolpdiagram som visar de olika sannolikheterna (se figur 4.3):



Figur 4.3:

Detta kallas en *binomial sannolikhetsfördelning*. Vi kan läsa ut sannolikheten för antalet träffar.

För varje kastomgång kan vi få olika resultat, t.ex. serien $\{t, m, t, t, m\}$ (t=träff och m=miss) eller serien $\{t, t, t, t, m\}$. Om vi ser på dessa resultat är "antalet träffar" en funktion av varje resultatserie. Om vi läser in serien $\{t, m, t, t, m\}$ i funktionen "antalet träffar" spottar den ut svaret 3.

En funktion som tar in en händelse från ett utfallsrum och spottar ut ett reellt tal kallas en *stokastisk variabel*. En stokastisk variabel är alltså ingen variabel som namnet missvisande säger, utan den är en funktion. En stokastisk variabel betecknas med en understreckad liten bokstav, exempelvis $\underline{x}$.

Om vi kallar den stokastiska variabeln (=s.v.) "antalet träffar på fem försök" för $\underline{x}$ får vi att definitionsmängden är alla olika resultatserier man kan bilda. Värdemängden är $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Den stokastiska variabeln $\underline{x}$ har en ändlig värdemängd och kallas *diskret*. Sambandet mellan de värden som den stokastiska variabeln antar och deras sannolikheter beskrivs med *frekvensfunktionen* f. För antalet träffar gäller t.ex att $f(4) = 0,4096$. Man brukar beteckna:

$$f(4) = p_4 = P(\underline{x} = 4) = \text{"sannolikheten att } \underline{x} \text{ antar värdet 4"}.$$

Vi skall nu sammanfatta dessa nya begrepp i en definition:

Definition 4.12 En *stokastisk variabel* $\underline{x}$ är en funktion från ett empiriskt utfallsrum till en delmängd av $\mathbf{R}$.

Den stokastiska variabeln $\underline{x}$ (och dess fördelning) är *diskret*, om dess värdemängd är ändlig (eller oändlig men uppräknelig).

Frekvensfunktionen f för den stokastiska variabeln $\underline{x}$ anger sannolikheten för varje värde som $\underline{x}$ antar och

$$f(x_k) = p_k = P(\underline{x} = x_k).$$

Sats 4.13 *Antag att* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *är värdemängden för den s.v.* $\underline{x}$. *Då gäller det att*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = 1.$$

4.10 Diskreta sannolikhetsfördelningar

Den fördelning som vi kallade binomial sannolikhetsfördelning kallas också för en *binomialfördelning*. Vi såg hur binomialfördelningen såg ut med $n = 5$. Allmänt definieras den som:

Binomialfördelning

För en binomialfördelning gäller:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

där $p \in]0,1[$, $n \in \mathbf{Z}_+$ och $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Att den stokastiska variabeln $\underline{x}$ är binomialfördelad brukar betecknas med att:

$$\underline{x} \sim Bin(n, p)$$

där n och p kallas *parametrar*. När man känner till parametrarna känner man helt till fördelningen.

Exempel 4.30

Bestäm sannolikhetsfördelningen för den stokastiska variabeln

$\underline{x}$ = *"antalet ögon som fås vid ett tärningskast"*.

Varje ögontal har sannolikheten $\frac{1}{6}$. Vi kan skriva:

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = \frac{1}{6}.$$

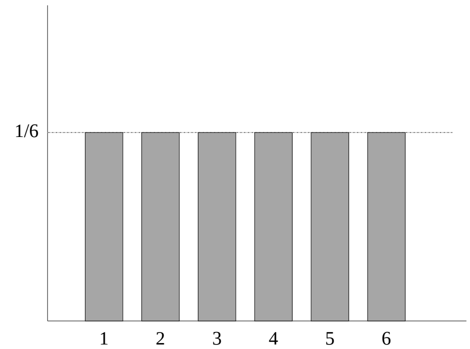
Vi skall åskådliggöra detta i ett diagram: (se figur 4.4)

Vi kallar detta för en *likformig fördelning*.

Likformig fördelning

Frekvensfunktionen för en likformig fördelning är:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}.$$



Figur 4.4:

4.11 En fördelnings karakteristikor

Vi såg att man helt kunde beskriva en binomialfördelning m.hj.a. dess parametrar n och p. Med hjälp av dessa kan vi exakt få reda på sannolikhetsfördelningen. Om vi vill jämföra olika fördelningar säger dock inte parametervärdena så mycket. I en fördelning kan ju ett parametervärde betyda en helt annan sak än i en annan fördelning. För att kunna jämföra olika fördelningar och speciellt för att få en beskrivning av en fördelning har man definierat *karakteristikor*. Dessa är värden som är karakteristiska för fördelningen, värden som på ett objektivt sätt beskriver fördelningen.

Den första karakteristikan vi skall definiera anger ett *väntevärde*. Återkalla exemplet med pilkastning. Vi tänker oss några pilkastare, innan de kastat. Vi vet hur fördelningen ser ut för antalet träffar i tavlan. Nu beskriver väntevärdet det antal träffar vi kan förvänta oss att var och en får, innan de kastat. Vi definierar:

Definition 4.14 En stokastisk variabel $\underline{x}$ antas ha värdemängden $V_{\underline{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ med tillhörande sannolikhetsfördelning $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Väntevärdet* av den stokastiska variabeln $\underline{x}$ är ett vägt medelvärde av elementen i värdemängden med motsvarande sannolikheter som vikter, d.v.s om väntevärdet betecknas $E\underline{x}$ är

$$E\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

Vi skall nu se på den likformiga fördelningen. För den likformiga fördelningen gäller det ju att $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Insättning i formeln för väntevärdet ger då:

$$E\underline{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

För en binomialfördelad s.v. med parametrarna n och p och värdemängden $V_{\underline{x}} = \{0, 1, \ldots, n\}$ gäller (utan bevis) att:

$$E\underline{x} = np.$$

Exempel 4.31

Väntevärdet för kast med tärning är:

$$E\underline{x} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Detta för att vi har att göra med en likformig fördelning med $p_i = \frac{1}{6}$. Värdemängden för den stokastiska variabeln är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exempel 4.32

Antalet träffar i en piltavla tänker vi oss att är binomialfördelat med parametrarna 5 och $0,8$. Beräkna väntevärdet.

Från formeln oven vet vi att väntevärdet $E\underline{x} = np$ vilket ger att $E\underline{x} = 5 \cdot 0,8 = 4$.

Nu säger inte väntevärdet allt. Man kan kanske undra hur fördelningen ser ut kring väntevärdet. Är det stor sannolikhet att den s.v. antar värden nära väntevärdet eller antar den s.v. ofta värden långt från väntevärdet?

För att mäta detta har man definierat spridningsmått. Dessa anger hur stort avståndet i medeltal är från det observerade värdet till väntevärdet. Hur skulle ett sådant mått se ut?

Vi tänker oss att avståndet mellan den stokastiska variablen $\underline{x}$ och väntevärdet $E\underline{x}$ beskrivs med:

$$|\underline{x} - E\underline{x}|.$$

Det förväntade värdet för detta värde är då:

$$E|\underline{x} - E\underline{x}|.$$

För att få ett bättre mått har det visat sig att man bör kvadrera detta uttryck. Vi definierar:

Definition 4.15 Den stokastiska variabeln $\underline{x}$ har *variansen* $Var\ \underline{x}$, vilken bestäms som väntevärdet av den stokastiska variabeln $(\underline{x} - E\underline{x})^2$, d.v.s.

$$Var\ \underline{x} = E(\underline{x} - E\underline{x})^2.$$

Variansen betecknas ofta med σ^2.

Kvadratroten ur variansen benämns *standardavvikelse*. Den betecknas ofta med σ och

$$\sigma = \sqrt{Var\ \underline{x}} = \sqrt{E(\underline{x} - E\underline{x})^2}.$$

Väntevärdet betecknas ofta med μ.

Vi kan nu sammanfatta hur man beräknar dessa tre karakteristikor:

Regler:

Om den stokastiska variabeln $\underline{x}$ har värdemängden $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ med sannolikhetsfördelningen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ är:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2 = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2} = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$$

Exempel 4.33

Se på exemplet med pilkastning (ex 4.32). Beräkna variansen och standardavvikelsen för variabeln.

Vi vet att variabeln är binomialfördelad med parametrarna 5 och $0,8$. Väntevärdet ges av:

$$\mu = 5 \cdot 0,8 = 4.$$

Vi vet från tidigare att variabeln antar värdena $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sannolikheten för dessa är:

$$p_0 = 0,00032$$
$$p_1 = 0,0064$$
$$p_2 = 0,0512$$
$$p_3 = 0,2048$$
$$p_4 = 0,4096$$
$$p_5 = 0,3277.$$

Vi kan nu räkna ut variansen:

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{5} p_i(x_i - \mu)^2 =$$
$$0,00032(0-4)^2 + 0,0064(1-4)^2 + 0,0512(2-4)^2 +$$
$$0,2048(3-4)^2 + 0,4096(4-4)^2 + 0,3277(5-4)^2 = 0,80002.$$

Standardavvikelsen blir då kvadratroten ur variansen, vilket här är $\sqrt{0,80002} = 0,8944$.

För en binomialfördelad variabel gäller att variansen kan uträknas enligt:

Regel:

Om den stokastiska variabeln $\underline{x}$ är binomialfördelad med parametrarna n och p gäller att:

$$Var\ \underline{x} = np(1-p).$$

Vi kan kontrollera att svaret i exemplet ovan gäller:

$$Var\ \underline{x} = 5 \cdot 0,8 \cdot (1-0,8) = 0,8.$$

4.12 Kontinuerliga fördelningar

Vi definierade i avsnitt 4.9 begreppet stokastisk variabel, s.v. En s.v. har som definitionsmängd ett utfallsrum och som värdemängd ett reellt tal. I exemplet med antalet träffar i en tavla när man kastade pil minns vi t.ex. att utfallet $\{t, m, t, t, m\}$ avbildades på talet 3 (=antalet träffar).

Den fördelning vi har behandlat mest noggrannt, binomialfördelningen har *alltid* heltal som värdemängd. Vi kommer i detta kapitel att utvidga begreppet s.v. att även innefatta en fördelning vars värdemängd är hela **R** eller ett delintervall av **R**. Vi kan t.ex. tänka oss att den stokastiska variabeln $\underline{x}$ har $V_{\underline{x}} = [0, 10]$, d.v.s. $\underline{x}$ kan anta alla värden mellan 0 och 10.

Definition 4.16 Den stokastiska variabeln $\underline{x}$ (och dess fördelning) är kontinuerlig, om dess värdemängd $V_{\underline{x}}$ är hela **R** eller ett delintervall av **R**. Fördelningen för en kontinuerlig stokastisk variabel bestäms av *frekvensfunktionen* f med egenskaperna:

1. $f \geq 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
2. f är kontinuerlig överallt, utom möjligen i ett ändligt antal x-värden.
3. Arean av området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln är 1.

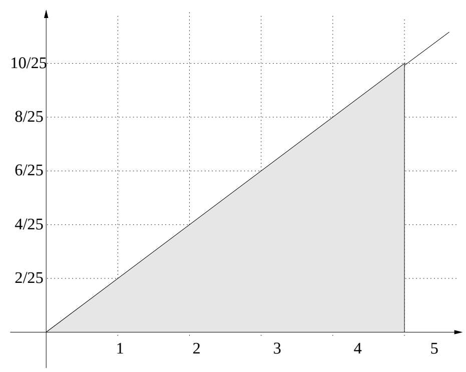
När vi bestämmer sannolikheterna P för en kontinuerlig stokastisk variabel har vi till vår hjälp frekvensfunktionen f. Varje funktion som uppfyller punkterna $1-3$ i definitionen ovan är en frekvensfunktion.

Exempel 4.34

Är $f(x)$ en frekvensfunktion för en kontinuerlig stokastisk variabel, då

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{för övriga x} \end{cases}$$

Frekvensfunktionen finns uppritad i figur 4.5.



Figur 4.5:

Vi undersöker nu de tre punkterna i definitionen:

Punkt 1 och 2 är utan tvekan uppfyllda. Vi kontrollerar punkt 3:

$$\int_0^5 \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{2}{25} \left(\frac{5^2}{2} - 0 \right) = 1.$$

$\therefore$ $f(x)$ är alltså en frekvensfunktion.

Vi minns att sannolikheten för en säker händelse är 1. Arean under frekvensfunktinen måste även den vara 1, enligt definitionen. Just arean under frekvensfunktionen beskriver sannolikheten för en kontinuerlig s.v. Därför gäller följande regel för en kontinuerlig s.v. $\underline{x}$:

Regel:

Antag att $\underline{x}$ är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktionen f. Sannolikheten att $\underline{x}$ skall anta ett värde i intervallet $[a, b]$, som tillhör definitionsmängden, är då arean av området under f som begränsas av linjerna $\underline{x} = a$ och $\underline{x} = b$, d.v.s:

$$P(a \leq \underline{x} \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exempel 4.35

Se på samma fördelning f som i föregående exempel. Beräkna följande sannolikheter:

a) $P(2 \leq \underline{x} \leq 4)$

b) $P(\underline{x} \leq 3)$

c) $P(\underline{x} \geq 3)$

d) $P(\underline{x} = 3)$

Vi använder regeln ovan och får:

a)

$$P(2 \leq \underline{x} \leq 4) = \int_2^4 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{2}{25}\left[\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right] = \frac{2}{25} \cdot 6 = \frac{12}{25}$$

b)

$$P(\underline{x} \leq 3) = \int_0^3 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{25}\left[\frac{3^2}{2} - 0\right] = \frac{2}{25} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{25}$$

c)

$$P(\underline{x} \geq 3) = \int_3^5 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5 = \frac{2}{25}\left[\frac{5^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right] = \frac{2}{25} \cdot 8 = \frac{16}{25} = 1 - P(\underline{x} \leq 3)$$

d)

$$P(\underline{x} = 3) = \int_3^3 \frac{2}{25} x dx = 0.$$

I *d*)-fallet får vi att sannolikheten för att den s.v. antar värdet 3 är 0. För kontinuerliga fördelningar gäller allmänt att $P(\underline{x} = a) = 0$ för en konstant a. Hur kan detta stämma? Man kan tänka sig att eftersom den s.v. $\underline{x}$ kan anta precis alla värden i $\mathbf{R}$ eller i ett delintervall av $\mathbf{R}$ så är sannolikheten att variabeln precis skall anta värdet a noll. Det finns ju oändligt många värden i $\mathbf{R}$ eller i ett delintervall av $\mathbf{R}$.

4.13 Normalfördelningen

Den utan tvekan vanligaste förekommande kontinuerliga fördelningen är *normalfördelningen*. Den är användbar p.g.a. att den beskriver många olika fenomen, ex. befolkningslängder, poäng i tenter, IQ, längden på pekfingret osv. Mest användbar är den ändå för att det har visats att summor av stokastiska variabler är normalfördelade. Detta kommer vi dock inte att gå in på här.

Vi skall börja med att definiera normalfördelningen:

Definition 4.17 Frekvensfunktionen för en *normalfördelning* är:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Här är parametrarna μ och σ reella tal och $\sigma > 0$.

Om den s.v. $\underline{x}$ är normalfördelad betecknas detta med:

$$\underline{x} \sim N(\mu, \sigma).$$

μ står för fördelningens väntevärde och σ är fördelningens standardavvikelse.

Om $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ kallar vi detta en *standardiserad normalfördelning*. Dess frekvensfunktion betecknas med φ (uttalas "lilla fi"). Alltså:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Normalfördelningen har som värdemängd hela den reella talaxeln. Vi skall se på vad som händer om vi varierar värdena på parametrarna μ och σ. Vi utgår från en fördelning som är $\sim N(0, 1)$. Om μ varierar har vi samma utseende på fördelningen, men placeringen är olika. μ beskriver ju väntevärdet. Om däremot σ varierar får vi olika utseende på grafen. Om $\sigma < 1$ är standardavvikelsen mindre. Detta betyder att de observerade värdena med större säkerhet ligger nära väntevärdet. Vi får alltså en fördelning, vars topp är spetsig. Om däremot $\sigma > 1$ leder det till att sannolikheten är större att de observerade värdena ligger längre från medelvärdet. Detta leder till att vi får en trubbigare figur.

Eftersom det är svårt att integrera fördelningsfunktionen för en normalfördelning har man gjort upp tabeller för den standardiserade normalfördelningen. Vi skall senare se att alla normalfördelningar kan överföras på denna.

Regler:

Vi ser på ett reellt tal $k > 0$. Vi undersöker den s.v. $\underline{x} \sim N(0, 1)$. Nu gäller det att

$$P(\underline{x} \leq k) = \Phi(k) \text{ (eller } F(k)).$$

Följande räkneregler gäller för $k, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$:

1. $P(\underline{x} \geq k) = 1 - P(\underline{x} \leq k) = 1 - \Phi(k)$.
2. $P(k_1 \leq \underline{x} \leq k_2) = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$.

   För $k < 0$ gäller följande:

$$\Phi(k) = 1 - \Phi(-k).$$

Tabell finns t.ex. i MAOL:s tabeller.

Exempel 4.36

Antag att $\underline{x} \sim N(0, 1)$. Bestäm följande sannolikheter:

a) $P(\underline{x} \leq 1)$

b) $P(\underline{x} \geq 1)$

c) $P(1 \leq \underline{x} \leq 2)$

d) $P(-1 \leq \underline{x} \leq 2)$

Vi använder reglerna ovan samt en tabell över normalfördelningens fördelningsfunktion. Då fås:

a)

$$P(\underline{x} \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413$$

b)

$$P(\underline{x} \geq 1) = 1 - P(\underline{x} \leq 1) = 1 - \Phi(1) =$$
$$1 - 0,8413 = 0,1587$$

c)

$$P(1 \leq \underline{x} \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$$

d)

$$P(-1 \leq \underline{x} \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$
$$\Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185.$$

Vi nämnde att man kan standardisera en variabel som är normalfördelad. Detta betyder att oberoende av värdena på μ och σ kan man göra om variabeln till en $N(0,1)$-fördelad.

Vi utgår från att vi har en variabel $\underline{x}$ som är $\sim N(\mu, \sigma)$. Observera här att μ och σ är reella tal. Om vi bildar variabeln $\underline{z}$ enligt:

$$\underline{z} = \frac{\underline{x} - \mu}{\sigma},$$

så kommer $\underline{z}$ att vara normalfördelad med parametrarna 0 och 1.

Exempel 4.37

Antag att längden av en fullvuxen finländsk kvinna är normalfördelad med väntevärdet 160 cm och standardavvikelsen 6, 5 cm. Vi vill bestämma sannolikheten att en kvinna, som vi väljer på måfå, har en längd som ligger mellan 150 och 170 cm.

Nu fås att

$$\text{längden} \sim N(160, 6.5).$$

Vi vill nu standardisera denna normalfördelning så att $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Den s.v. "längden" kallar vi $\underline{x}$ och vi har:

$$\underline{x} \sim N(160, 6.5)$$

Härnäst bildar vi den s.v. $\underline{z}$ som:

$$\underline{z} = \frac{\underline{x} - 160}{6,5}.$$

Nu är $\underline{z}$ normalfördelad med parametrarna 0 och 1.

Eftersom vi ville undersöka

$$P(150 \leq \underline{x} \leq 170)$$

måste vi även standardisera gränserna. Detta sker på samma sätt:

$$P(150 \leq \underline{x} \leq 170) = P\left(\frac{150 - 160}{6,5} \leq \underline{z} \leq \frac{170 - 160}{6,5}\right) =$$
$$P(-1,54 \leq \underline{z} \leq 1,54).$$

Nu kan vi räkna ut denna sannolikhet med våra vanliga regler eftersom $\underline{z}$ är en standardiserad normalfördelning.

$$P(-1,54 \leq \underline{z} \leq 1,54) = \Phi(1,54) - \Phi(-1,54) =$$
$$\Phi(1,54) - (1 - \Phi(1,54)) =$$
$$2 \cdot \Phi(1,54) - 1 = 2 \cdot 0,9382 - 1 = 0,8764.$$

Kapitel 5

Summor och talföljder

5.1 Talföljder

Vi skall börja med att se på några exempel på talföljder:

Exempel 5.1

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

$$1, 4, 9, 16 \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Genom att undersöka talföljderna ovan ser vi att de följer en regel, som karakteriserar dem. Detta ligger också i grunden för vår definition av talföljder:

Definition 5.1 En (reell) *talföljd* är en avbildning eller en funktion $f : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$. Talföljden bildas av funktionsvärdena och funktionsföreskriften utgör *regel* för talföljden. Det allmänna elementet i en talföljd betecknas ofta med a_n och $f(n) = a_n$.

Exempel 5.2

För talföljderna i exemplet ovan kan vi ge följande regler:

$$f(n) = a_n = n,$$

$$f(n) = a_n = n^2$$

$$f(n) = a_n = \frac{1}{n}$$

Den italienska matematikern Leonardo Fibonacci (c. 1170 - c. 1250) är bl.a. känd för att han undersökte kaninernas förökningstakt och kom fram till en talföljd som kallas *Fibonaccis talföljd* (det är den talföljden som finns på elverkets skorsten i Åbo). I den uttrycks inte regeln som en funktion av n utan som en funktion av tidigare observationer i talföljden. Detta är ett vanligt tillvägagångssätt som ofta används.

Exempel 5.3

Fibonaccis talföljd har utseendet:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Regeln för denna är:

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Vi skall se på två olika typer av talföljder som är vanligt förekommande. De har också den fördelen att de är lättbearbetliga.

Definition 5.2 En talföljd sägs vara *aritmetisk*, om *differensen* mellan två på varandra följande element i talföljden är konstant. Det bör alltså gälla att:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

d kallas *differens*.

En talföljd sägs vara *geometrisk*, om *förhållandet* mellan två på varandra följande element i talföljden är konstant. Då gäller följaktligen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

där q kallas *kvot*.

Exempel 5.4

Är talföljden $a_n = 3 - 8n$ aritmetisk?

$$a_{n+1} - a_n = (3 - 8(n+1)) - (3 - 8n) = 3 - 8n - 8 - 3 + 8n = -8$$

Differensen är konstant ($d = -8$), vilket ger att talföljden är aritmetisk.

Exempel 5.5

Är Fibonaccis talföljd aritmetisk?

Vi undersöker differesen:

$$a_{n+1} - a_n = (a_n + a_{n-1}) - (a_{n-1} + a_{n-2}) = a_n - a_{n-2}$$

Denna är inte konstant (vilket vi ser om vi undersöker serien) och därmed är Fibonaccis talföljd inte aritmetisk.

Exempel 5.6

Är talföljden $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ geometrisk?

Regeln för denna talföljd är $a_n = \frac{1}{2^n}$. Beräknar kvoten mellan två på varandra följande element:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Kvoten är konstant $\Rightarrow$ Talföljden är geometrisk.

Det allmänna elementet i en geometrisk talföljd kan skrivas som:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exempel 5.7

Bestäm det åttonde elementet i den geometriska talföljden

$$\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots$$

Vi använder oss av att $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Här är

$$a_1 = \frac{2}{5} \qquad \text{och} \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Då fås

$$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{128}\right) = -\frac{1}{320}.$$

5.2 Monotona och begränsade talföljder

Talföljder är egentligen funktioner med definitionsmängden $\mathbf{Z}_+$. Detta betyder att vi kan undersöka monotonitet för talföljder.

Definition 5.3 Talföljden (a_n) är för alla $n \in \mathbf{Z}_+$:

Växande,	om $a_{n+1} \geq a_n$
Strängt växande,	om $a_{n+1} > a_n$
Avtagande,	om $a_{n+1} \leq a_n$
Strängt avtagande,	om $a_{n+1} < a_n$

Om vi ser på talföljder som är monotona betyder det inte att de skulle vara obegränsade för det. En monoton funktion, och en strängt monoton funktion, kan vara begränsad eller obegränsad. Detta definieras som:

Definition 5.4 Talföljden (a_n) är *begränsad uppåt* om det finns en konstant $M \in \mathbf{R}$, så att $a_n \leq M$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Talföljden (a_n) är *begränsad nedåt* om det finns en konstant $m \in \mathbf{R}$, så att $a_n \geq m$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

En talföljd är *begränsad* om den är begränsad både uppåt och nedåt.

Exempel 5.8

Är talföljden

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

begränsad?

Vi måste undersöka såväl om den är begränsad uppåt som nedåt.

Talföljden är begränsad nedåt, eftersom

$$\frac{2n-1}{n+1} > 0,$$

Detta ty $2n-1>0$ och $n+1>0$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

Talföljden är begränsad uppåt, ty:

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2n}{n+1} < \frac{2n}{n} = 2.$$

Dessa båda påståenden ger att talföljden är begränsad.

5.3 Gränsvärde av en talföljd

Vi skall nu se på vad som händer med en talföljd när $n \to \infty$. Vi säger att vi undersöker *gränsvärdet* för en talföljd.

Vi såg i förra avsnittet på talföljden $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Vi såg att den var begränsad i det avseendet att dess värde inte kunde överstiga 2. För talföljden gäller:

n	a_n
1	0,500
2	1,000
3	1,250
4	1,400
5	1,500
10	1,727
100	1,970
1000	1,997
10000	1,9997
100000	1,99997

Vi inser att differensen mellan varje observation blir mindre och mindre allt eftersom funktionsvärdena närmar sig 2. Vi kan komma “hur nära talet 2 som helst”, när ett tillräckligt stort tal n ligger som grund. Funktionsvärdet kommer dock aldrig att överstiga 2.

Definition 5.5 (Intuitiv) Talföljden (a_n) har *gränsvärdet* a eller *konvergerar mot gränsvärdet* a, om elementen i talföljden ligger godtyckligt nära talet a, så snart n väljs tillräckligt stort. Detta betecknas med:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

En talföljd som inte konvergerar *divergerar*. För de talföljder vi såg på tidigare, aritmetisk och geometrisk, är det speciellt lätt att avgöra om de konvergerar eller divergerar. Det gäller nämligen att en aritmetisk talföljd alltid divergerar om differensen är $\neq 0$. För geometriska talföljder gäller följande sats:

Sats 5.6

$$\textit{Talföljden } (q^n) \begin{cases} \textit{konvergerar,} & \textit{då } -1 < q \leq 1 \\ \textit{divergerar,} & \textit{då } q \leq -1 \vee q > 1 \end{cases} \quad \textit{ty}$$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \textit{då} \quad |q| < 1 \\ 1, & \textit{då} \quad q = 1 \\ \infty, & \textit{då} \quad q > 1 \\ \textit{saknas,} & \textit{då} \quad q \leq -1 \end{cases}$$

Exempel 5.9

Vi ser på den geometriska talföljden $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Sätter vi $q = \frac{3}{4}$ och $a_1 = 1$, gäller det t.ex. att

$$a_{1000} = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{999} \approx 1,53 \cdot 10^{-125}.$$

Sätter vi däremot q att vara $\frac{5}{4}$ gäller det att:

$$a_{1000} = 1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{999} \approx 6,50 \cdot 10^{96}.$$

Med dessa värden är det inte svårt att tro på satsen ovan.

Exempel 5.10

Beräkna gränsvärdet för

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2^{n+2} - 2)$$

då $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2^{n+2} - 2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^{n+2-n} - 2^{1-n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 4 - 0 = 4.$$

Exempel 5.11

För vilka värden på x konvergerar talföljden $a_n = (x-1)^n$?

Detta är en geometrisk följd, med kvoten $q = x - 1$. För att denna skall konvergera krävs att:

$$-1 < 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2.$$

5.4 Serier

Vi har hittills koncentrerat oss på talföljder. Vi har sett på enskilda element och utgående från en regel bestämt det n:te elementet. Ofta är man intresserad av att undersöka summor av talföljder. Vi tänker oss att:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n
\end{aligned}$$

Talen $a_1, a_2, \ldots$ kallas seriens *termer*. För s_n har man infört en speciell beteckning:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Detta läses som "summan av alla a_k:n då k går från 1 till n". Beteckningen s_n kallas en *delsumma*.

För en aritmetisk samt en geometrisk serie har vi följande regler som ger delsummorna:

Delsumman i en aritmetisk serie är produkten av antalet termer och medelvärdet av första och sista termen, d.v.s:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Delsumman i en geometrisk serie är :

$$\begin{gathered} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \\ a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad \text{om } q \neq 1. \end{gathered}$$

Om $q = 1$ gäller att:

$$s_n = n a_1.$$

5.5 Konvergenta serier

I detta avsnitt kommer vi att se på vad som händer när man låter antalet termer i en serie gå mot oändligheten. Speciellt skall vi se på fallet där vi har en geometrisk serie. Att en serie har oändligt antal termer betecknas med:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Om denna summa har ett *gränsvärde* sägs den vara *konvergent*, annars *divergent.*

Vi skall se på en sats som gäller konvergens för en geometrisk serie. Den säger att:

Sats 5.7 *Den geometriska serien*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a q^k, \qquad a \neq 0,$$

är konvergent om och endast om $|q| < 1$. *Dess summa är:*

$$\frac{a}{1-q}$$

d.v.s.

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots = a\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a}{1-q}.$$

Exempel 5.12

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$