

Kapitel 5

Geometri och Trigonometri

I detta kapitel kommer vi att koncentrera oss på de trigonometriska funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$.

5.1 Repetition

Här repeteras några viktiga trigonometriska definitioner och formler.

Summan av vinklarna i en triangel är alltid 180° . Vi definierar två typtrianglar.

Definition 5.1 Typtriangel 1. *Denna har vinklarna 30° , 60° och 90° .*

Typtriangel 2. *Denna har vinklarna 45° , 45° och 90° .*

Sats 5.2 *För typtriangel 1 gäller att sidorna har förhållandet:*

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

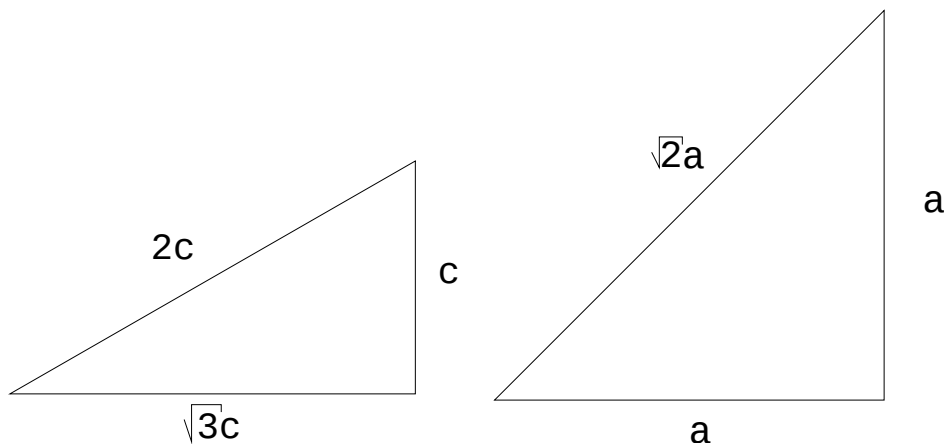
För typtriangel 2 gäller att sidorna har förhållandet:

$$1 : 1 : \sqrt{2}.$$

Definition 5.3 *Vi definierar begreppet area på följande sätt. För arean A hos en rektangel med sidorna a och b gäller att*

$$A = ab.$$

Vi kräver dessutom att arean hos ett sammansatt geometriskt föremål ska vara summan av delarnas area.



Figur 5.1: Typtriangel 1 respektive 2.

Sats 5.4 Beteckna höjden i en triangel med h , samt basens längd med b . Då gäller för arean A att:

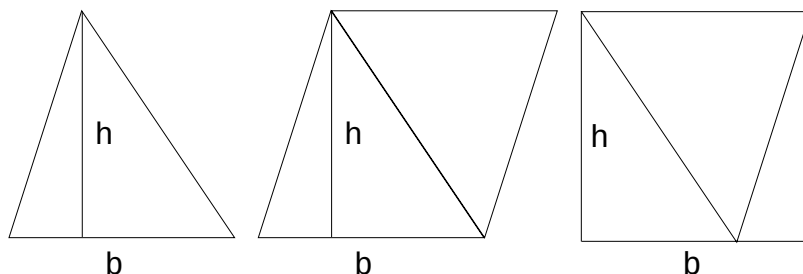
$$A = \frac{h \cdot b}{2}.$$

Bevis:

Vi gör ett geometriskt bevis. Beteckna arean med A . Vi bör visa att $A = bh/2$. Ta två identiska trianglar med basen b och höjden h . Se figuren nedan.

Sätt den ena uppochner på den andra, så att ett *parallelogram* fås. Detta har arean $2A$, eftersom det består av två trianglar som vardera har arean A . Klipp loss den ena sidofliken, längs höjden på den ursprungliga triangeln och foga den till den andra kanten. Vi har nu fått en rektangel med kantlängderna b och h . Dess area är summan av arean av dess delar, så

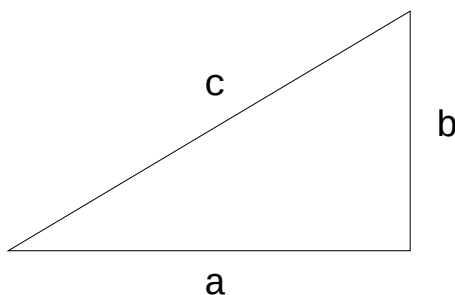
$$2A = bh \iff A = \frac{ab}{2}.$$



■

Sats 5.5 Pythagoras sats. *Antag att a och b är längderna av kateterna och c är längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel. Då gäller att*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Figur 5.2: Pythagoras sats: $a^2 + b^2 = c^2$.

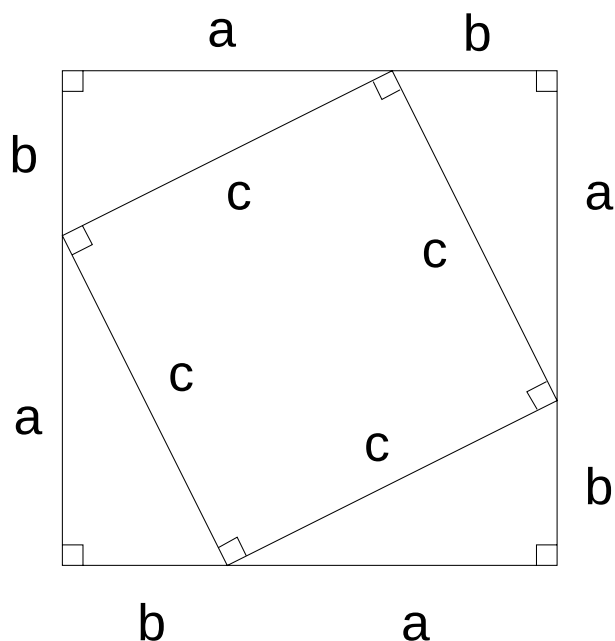
Bevis:

Vi gör igen ett geometriskt bevis. Ta fyra rätvinkliga trianglar med katetlängderna a och b och låt hypotenusans längd vara c . Vi bör visa att $a^2 + b^2 = c^2$.

Placera ut de fyra trianglarna i en kvadrat så, att de räta vinklarna blir kvadratens hörn. Då har denna stora kvadrat arean $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$. Den stora kvadraten består av en mindre kvadrat, som har kantlängden c och således arean c^2 , och fyra trianglar som vardera har arean $ab/2$. Klart att totala arean hos den stora kvadraten ska vara densamma som summan hos dess delar. (Se figuren nedan.) Vi skriver upp detta.

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \iff a^2 + b^2 = c^2$$

■



Figur 5.3: Figuren till beviset för Pythagoras sats.

Definition 5.6 Likformiga figurer är identiska, så när som på att de är olika stora. (Vi tillåter rotation.) Vi definierar längdskalan k som förhållandet mellan längden hos motsvarande delar i figurerna. Eventuella motsvarande vinklar är lika stora och om figurerna har area, så är förhållandet mellan areorna k^2 .

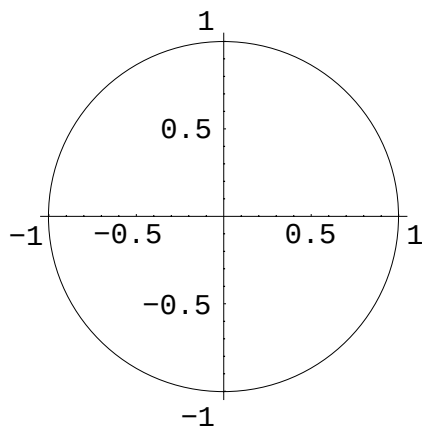
Sats 5.7 En cirkel med radien r har omkretsen O resp arean A :

$$O = 2\pi r \quad \text{och} \quad A = \pi r^2$$

Talet π , förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter, är irrationellt och har närmevärdet 3,141593.

5.2 Vinklar och vinkelenheten radian

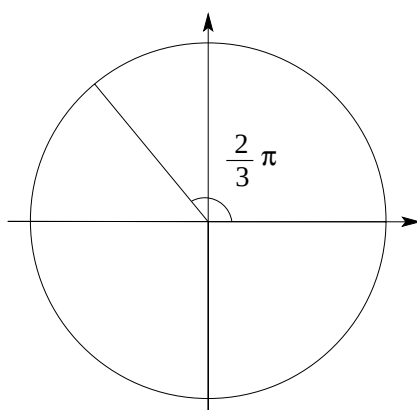
Studera figuren med en cirkel inritad nedan.



Figur 5.4: Grafen av cirkeln med mittpunkt i origo och radien 1. Denna cirkel kallas allmänt för *enhetscirkeln*.

Denna cirkel, med radien 1 och mittpunkten i origo kallas *enhetscirkeln*. Eftersom $r = 1$ är omkretsen av cirkeln 2π . När vi mäter storleken av en vinkel vore ett naturligt sätt att ange hur lång bågen inuti vinkeln är.

Definition 5.8 *Storleken av en vinkel i radianer* (betecknas *rad*) är mätetalet för längden av motsvarande båge i enhetscirkeln.



Figur 5.5: Vinkeln $\frac{2\pi}{3}$. Detta är den sträcka av enhetscirkelns periferi som finns mellan vinkelbenen.

Vi har att $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, så

$$1^\circ = \frac{1}{360} 2\pi \text{ rad}.$$

Detta ger oss följande samband mellan radianer och grader:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t}{2\pi}$$

där t är vinkeln i radianer och α är samma vinkel i grader.

Exempel 5.9 Hur många grader är

$$\frac{2}{3}\pi \text{ rad?}$$

Lösning:

α är okänt i exemplet. $t = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$. Detta ger

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi}{6\pi} \iff \alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ.$$

Exempel 5.10 Hur många radianer är 225° ?

Lösning:

Här är t okänt. Vi får:

$$\frac{225^\circ}{360^\circ} = \frac{t}{2\pi} \iff t = \frac{5}{8} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{4}$$

Vinkeln t mätt i radianer anger hur lång väg vi rört oss motsols längs enhetscirkelns periferi (positiv riktning). Vi kommer inte att begränsa denna sträcka till ett varv, så vi kan ha vinklar större än 2π . Vi kommer även att tillåta negativa vinklar, vilket alltså svarar mot att vi rör oss medsols.

Mot varje $t \in \mathbf{R}$ svarar exakt en periferipunkt P på enhetscirkeln. Omvänt svarar varje punkt på enhetscirkeln mot följande (oändligt många) reella tal

$$t + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Radianvinkeln t är entydigt bestämd på varvet när, så om vi begränsar oss till vinklar $t \in [0, 2\pi[$, fås att varje P svarar mot exakt t . (Avbildningen från P till t är en bijektion.)

Exempel 5.11 Bestäm vinkeln $t \in [0, 2\pi[$ som svarar mot samma periferipunkt som vinkeln $t' = -\frac{37}{6}\pi$.

Lösning:

Eftersom $-\frac{37}{6}\pi$ kan skrivas som

$$\frac{11\pi}{6} + (-4) \cdot 2\pi \quad \text{och} \quad \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi[,$$

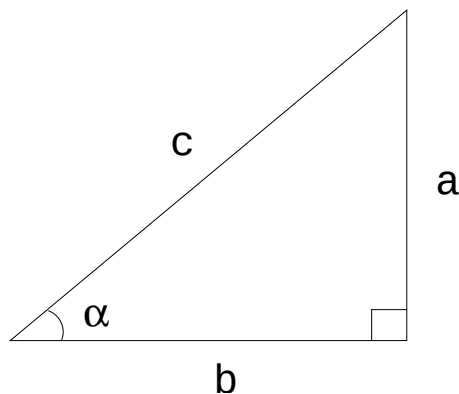
har vi bestämt t .

$$t = \frac{11\pi}{6}.$$

Motivering: Om vi dividerar vinkeln med 2π , så får vi reda på hur många hela varv vi har snurrat, i detta fall $-37\pi/6/2\pi = -37/12 = -3$ hela $1/12$ varv. Vi får alltså att $t' = t - 4 \cdot 2\pi$, då vi kräver att t ska vara en positiv vinkel, mindre än ett helt varv.

5.3 Trigonometri - den rätvinkliga triangeln

Definition 5.12 För en spetsig vinkel α , ($< \frac{\pi}{2}$), i en rätvinklig triangel gäller (jfr figuren):



Figur 5.6: Vinkeln α i den rätvinkliga triangeln med motstående kateten a , närliggande kateten b samt hypotenusan c .

1.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$$

2.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

3.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

4.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

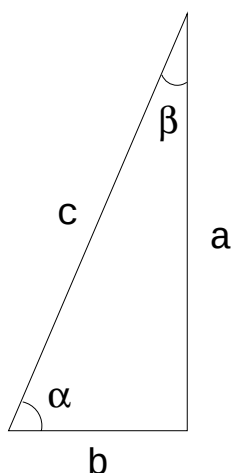
Exempel 5.13 En (spetsig) vinkel i en rätvinklig triangel uppmäts till

$$\frac{5}{12}\pi$$

Vinkelns närliggande katet uppmäts till 5.0 cm. Beräkna triangelns övriga delar.

Lösning:

Betecknar den uppmätta vinkeln med α . Eftersom vinkelsumman i en triangel är π erhålls vinkeln β (jämför figuren):



$$\beta = \pi - \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Längden hos sidan a erhålls:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \iff a = b \tan \alpha \approx 18.7.$$

Längden på c är:

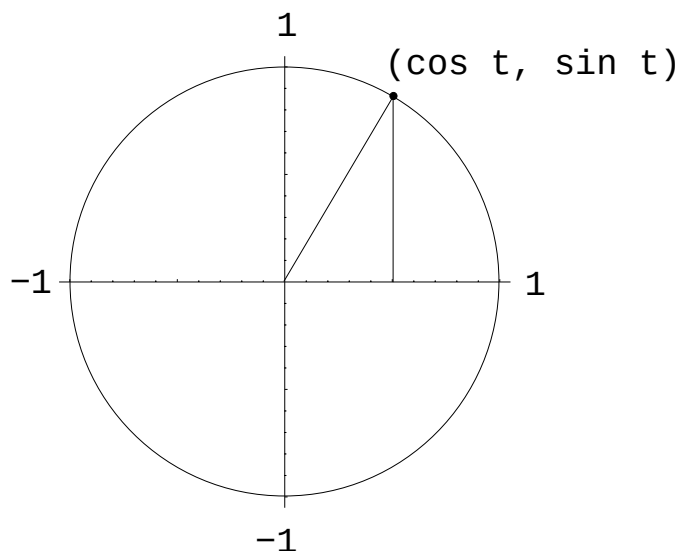
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \iff c = \frac{b}{\cos \alpha} \approx 19.3.$$

Längden av c kunde vi alternativt ha beräknat m.hj.a. Pythagoras sats:

$$c^2 = a^2 + b^2 \approx 18.7^2 + 5.0^2 = 374.69 \implies c \approx 19.4$$

Anmärkning 5.14 Minns att ändra till rad på räknaren!!!

5.4 Enhetscirkeln



Vi vill undersöka $\sin$ för vinkeln t . Vi ritar in en rätvinklig triangel i enhetscirkeln. Eftersom

$$\sin t = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}},$$

så fås $\sin t$ som höjden genom hypotenusan. I enhetscirkeln gäller det att hypotenusan har längden 1. Vinkeln t svarar mot en periferipunkt (x, y) . Höjden är y . Därför gäller det att:

$$\sin t = \frac{y}{1} = y.$$

På motsvarande sätt gäller det för $\cos t$ att denna är:

$$\cos t = \frac{x}{1} = x.$$

Definition 5.15 *Sinus och cosinus för det reella talet t , definieras i enhetscirkeln med hjälp av motsvarande periferipunkt.*

$$\sin t = \text{Periferipunktens } y\text{-koordinat}$$

$$\cos t = \text{Periferipunktens } x\text{-koordinat}$$

En periferipunkt har koordinaten $(\cos t, \sin t)$, där t är längden längs med enhetscirkeln.

Funktionerna $\sin t$ och $\cos t$ har $D = \mathbf{R}$ och $V = [-1, 1]$. Utgående från tidigare införda definitioner på tangens och cotangens erhålls:

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

och

$$\cot t = \frac{x}{y} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Definitionsmängden för $\tan$ är alla reella tal, utom de punkter där vi har $\cos t = 0$. Detta är punkterna $(0, 1)$ och $(0, -1)$ på enhetscirkeln. I dessa punkter är

$$t = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Det gäller alltså att:

$$D_{\tan t} = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

För värdemängden gäller att:

$$V_{\tan t} = \mathbf{R}.$$

Detta kan man förstå genom att studera den geometriska tolkningen av tangens. (Se figuren nedan.)

Eftersom höjden i en triangel inskriven i enhetscirkeln kan tolkas som $\sin t$ och basen som $\cos t$ gäller följande sats.

Sats 5.16 *Pythagoras sats tillämpad på enhetscirkeln ger direkt att*

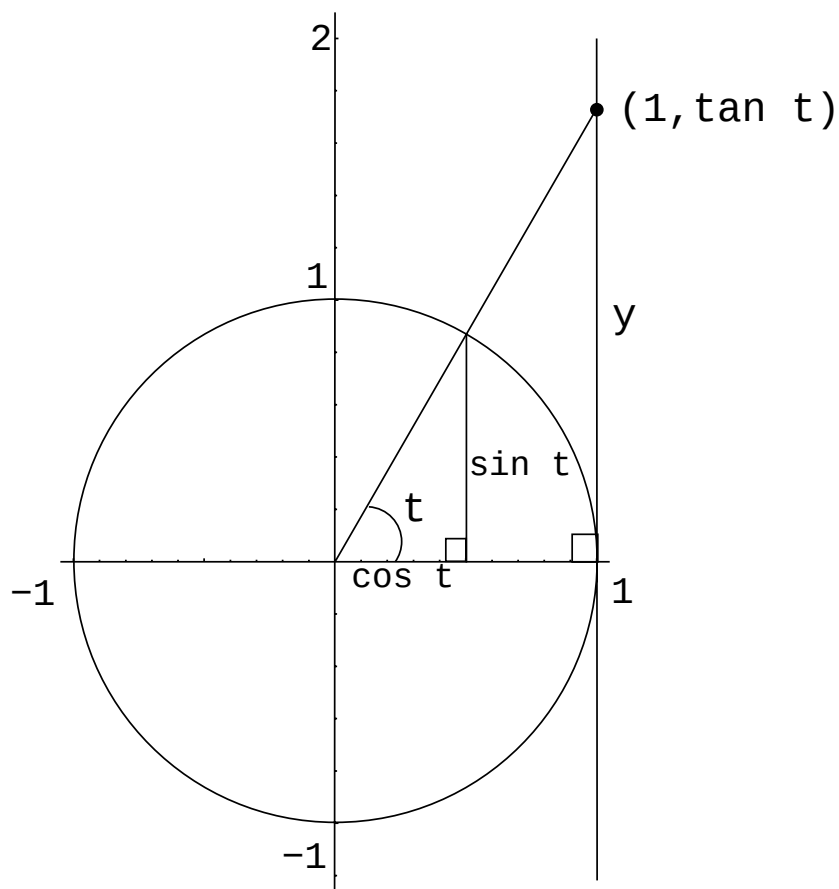
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

för varje $t \in \mathbf{R}$.

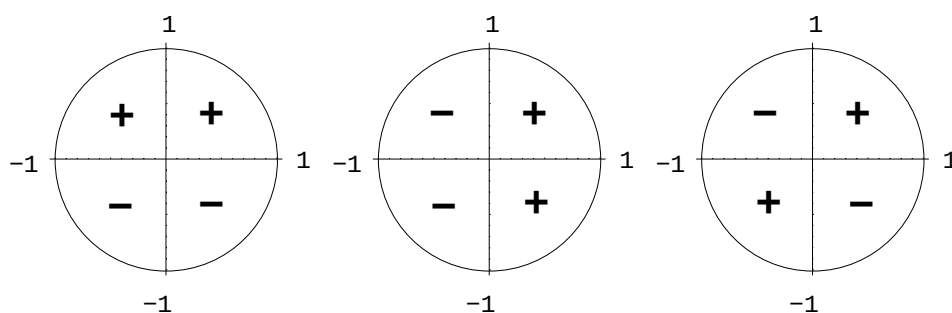
För tecknet på de trigonometriska funktionerna gäller att:

	$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$
$\sin t$	+	+	−	−
$\cos t$	+	−	−	+
$\tan t$	+	−	+	−

För $0 < t < \frac{\pi}{2}$ säger man att vinkeln ligger i den första kvadranten. För $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ sägs t ligga i den andra kvadranten o.s.v.



Figur 5.7: Tangens för vinkeln t kan uppfattas som y -koordinaten för skärningspunkten mellan den utdragna linjen genom punkterna $(0,0)$ och $(\cos t, \sin t)$ och linjen $x = 1$. Detta tack vare, att $y/1 = \sin t / \cos t = \tan t$, enligt teorin om likformiga figurer.



Figur 5.8: Teckenväxlingarna hos $\sin t$, $\cos t$ respektive $\tan t$.

Exempel 5.17 Bestäm $\sin t$ och $\cos t$ då $\tan t = -3$ och $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Lösning:

Eftersom

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = -3$$

måste det gälla att:

$$\sin t = -3 \cos t.$$

Det gäller att

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Insättning av $\sin t = -3 \cos t$ ger

$$9\cos^2 t + \cos^2 t = 1 \iff \cos^2 t = \frac{1}{10} \iff \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Eftersom $\cos t < 0$ i det angivna intervallet förkastas den positiva lösningen.

Nu gäller det att $\sin t = -3 \cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

5.5 Några rekursionsformler

Tidigare har vi konstaterat att:

Räkneregler 5.18 För $t \in \mathbf{R}$ gäller att:

1. $\sin(t + 2n\pi) = \sin t \quad t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}.$
2. $\cos(t + 2n\pi) = \cos t \quad t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}.$
3. $\tan(t + n\pi) = \tan t \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{m\pi + \pi/2 \mid m \in \mathbf{Z}\}.$

Exempel 5.19 Räkneregeln 2:

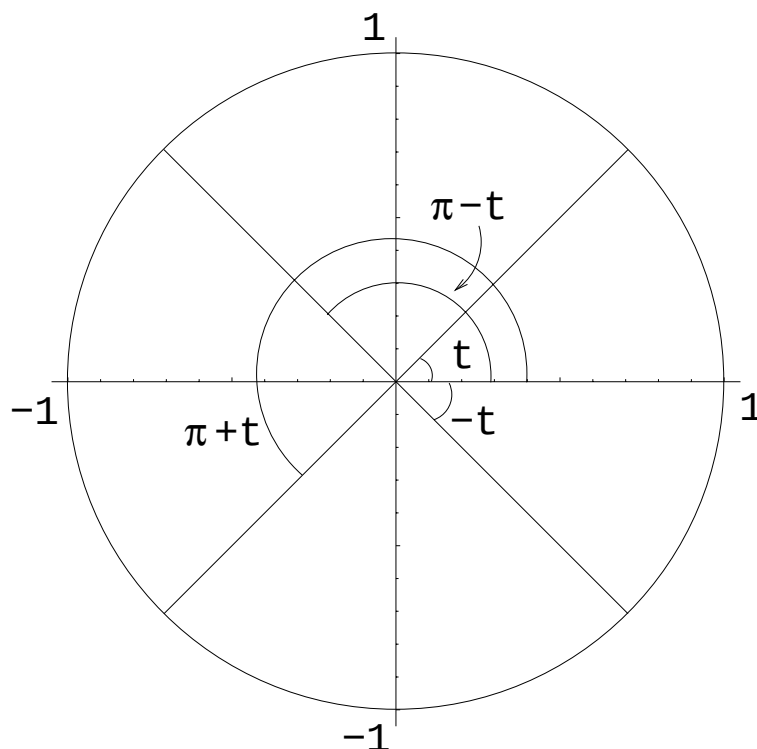
$$\cos(-7\pi) = \cos(\pi - 8\pi) = \cos \pi = -1$$

Ytterligare gäller följande formler. De finns alla i MAOLs Tabeller, så det är ingen idé att börja lära sig dessa utantill. Vid tenttillfället kan man få låna en motsvarande samling trigonometriska formler ifall man inte har tillgång till MAOLs.

Räkneregler 5.20 Följande ekvationer gäller.

1. $\sin(\pi - t) = \sin t, t \in \mathbf{R}.$
2. $\cos(\pi - t) = -\cos t, t \in \mathbf{R}.$
3. $\tan(\pi - t) = -\tan t, t \in \mathbf{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 \mid n \in \mathbf{Z}\}.$
4. $\sin(\pi + t) = -\sin t, t \in \mathbf{R}.$
5. $\cos(\pi + t) = -\cos t, t \in \mathbf{R}.$
6. $\sin(-t) = -\sin t, t \in \mathbf{R}.$
7. $\cos(-t) = \cos t, t \in \mathbf{R}.$
8. $\tan(-t) = -\tan t, t \in \mathbf{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 \mid n \in \mathbf{Z}\}.$

Dessa räkneregler kan motiveras geometriskt. Från de tre sista räknereglerna och definitionen på udda och jämn funktion ser vi att $\cos t$ är en jämn funktion, medan $\sin t$ och $\tan t$ är udda.



Figur 5.9: Räknereglerna kan motiveras med hjälp av denna figur.

Exempel 5.21 Bestäm exakt värde för

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Lösning:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5.6 De trigonometriska funktionernas grafer

Vi skall se på graferna av funktionerna

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x$$

$$h(x) = \tan x.$$

Vi har följande egenskaper för $f(x) = \sin x$:

1. $\sin 0 = 0$.
2. $\sin x$ är en udda funktion. Detta innebär att den är symmetrisk m.a.p. origo.
3. Kurvan är periodisk med perioden 2π , dvs.

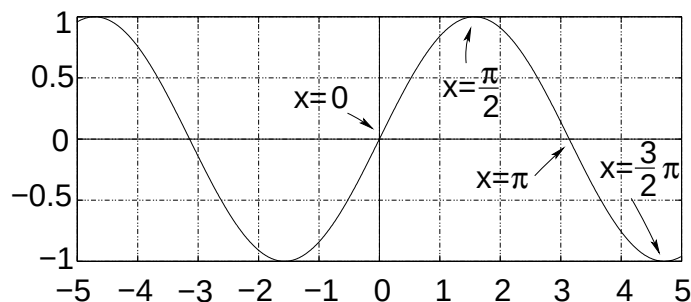
$$\forall t \in \mathbf{R} : \sin(t + 2\pi) = \sin(t).$$

4. Kurvan skär x -axeln i $x = n\pi$ där $n \in \mathbf{Z}$.
5. Funktionens största värde är 1 och dess minsta värde är -1. Det största värdet antas för

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad , n \in \mathbf{Z}$$

och det minsta för

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad , n \in \mathbf{Z}.$$

Figur 5.10: Grafen för $f(x) = \sin x$.

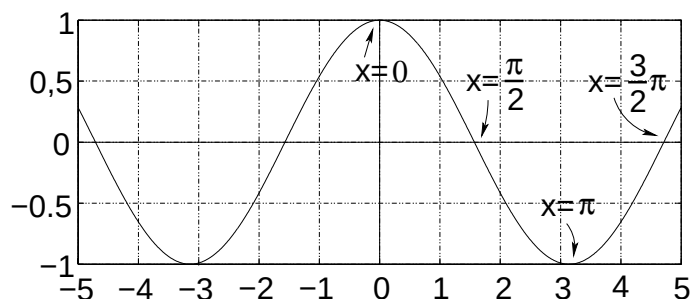
Vi har följande egenskaper för $g(x) = \cos x$:

1. $\cos 0 = 1$.
2. $\cos x$ är en jämn funktion. Detta innebär att den är symmetrisk m.a.p. y -axeln.
3. Kurvan är periodisk med perioden 2π .
4. Kurvan skär x -axeln i $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ där $n \in \mathbf{Z}$.
5. Funktionens största värde är 1 och dess minsta är -1. Maximivärdet antas för

$$x = 2\pi n \quad , n \in \mathbf{Z}$$

och minimivärdet för

$$x = \pi + 2\pi n \quad , n \in \mathbf{Z}.$$

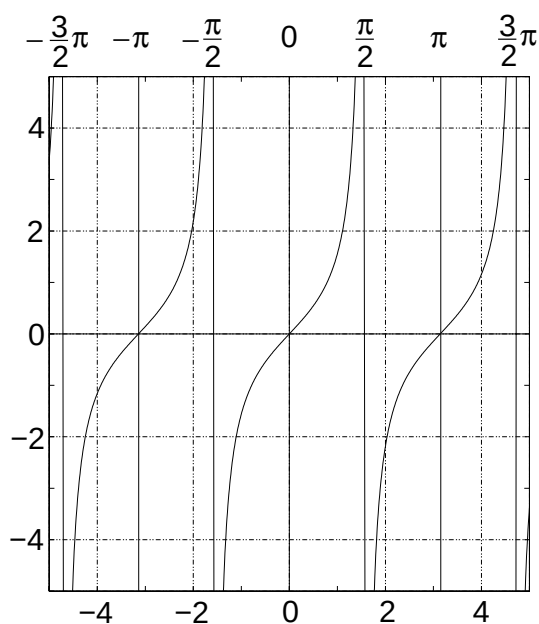
Figur 5.11: Grafen för $g(x) = \cos x$.

Vi har följande egenskaper för $h(x) = \tan x$:

1. $\tan 0 = 0$.
2. $\tan x$ är en udda funktion. Detta innebär att den är symmetrisk m.a.p. origo.
3. Kurvan är periodisk med perioden π .
4. Tangensfunktionen är odefinierad för

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , n \in \mathbf{Z}$$

5. och strängt växande mellan dessa x -värden.



Figur 5.12: Grafen för $h(x) = \tan x$.

5.7 Trigonometriska formler

Alla dessa formler finns igen i MAOLs.

Följande trigonometriska formler gäller. Välj alltid antingen de övre eller de undre tecknen samtidigt. Om man blandar gäller formlerna inte.

Räkneregler 5.22 Additionsformler:.

1.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

2.

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

3.

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

där $x, y, x \pm y \neq m\pi + \pi/2$ för varje $m \in \mathbf{Z}$.

Exempel 5.23 Bestäm $\sin(x - y)$ då $\sin x = -\frac{1}{4}$ och $\cos y = \frac{2}{3}$. Det gäller att $0 < x, y < \frac{3\pi}{2}$.

Lösning:

Vinkeln x ligger i den tredje kvadranten, eftersom $\sin x < 0$ och vi antar att $0 < x < 3\pi/2$, dvs. vi utesluter den fjärde kvadranten. Vinkeln y måste på motsvarande sätt ligga i den första kvadranten eftersom $\cos y > 0$.

För att bestämma $\sin(x - y)$ behöver vi förutom $\sin x$ och $\cos y$ känna till $\cos x$ och $\sin y$. Dessa uträknas ur sambandet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Det gäller alltså att:

$$\sin x = -\frac{1}{4} \implies \cos x = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Eftersom x ligger i den tredje kvadranten är $\cos x < 0$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Vidare gäller det att:

$$\cos y = \frac{2}{3} \implies \sin y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Vinkeln y tillhör den första kvadranten, och vi kan sluta oss till att:

$$\sin y = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Insättning i formeln $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ ger:

$$\begin{aligned}\sin(x - y) &= -\frac{1}{4} \frac{2}{3} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= -\frac{2}{12} + \frac{5\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3} - 2}{12}.\end{aligned}$$

Två vinklar vars summa är $\frac{\pi}{2}$ kallas *komplementvinklar*. Följande regler gäller för dessa:

Räkneregler 5.24 För komplementvinklar gäller:

1.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

2.

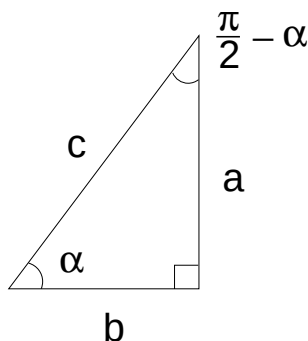
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

3.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

4.

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$$



Figur 5.13: Räknereglerna för komplementvinkel ses enkelt i denna figur. Exempelvis fås $\sin \alpha = a/c = \cos(\pi/2 - \alpha)$ och $\tan \alpha = a/b = \cot(\pi/2 - \alpha)$.

Räkneregler 5.25 *Formler för dubbla vinklar:*

1.

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

2.

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

3.

$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$$

*(Där respektive uttryck är väldefinierat.)***Exempel 5.26** *Härled en formel för*

$$\sin \frac{x}{2}.$$

*Lösning:**Eftersom vi kan skriva $\cos x$ som:*

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

gäller det att:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

5.8 Trigonometriska ekvationer

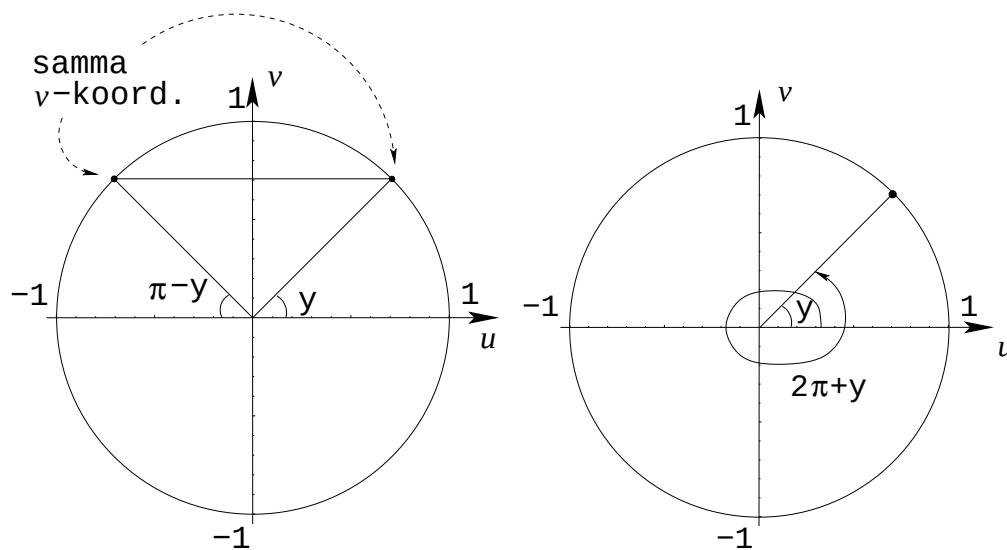
Vi skall i denna sektion lösa trigonometriska ekvationer.¹

5.8.1 Ekvationer av formen $f(x) = f(y)$

I denna sektion löses uppgifter av formen $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$ och $\tan x = \tan y$. Vi låter x, y vara reella variabler, i detta fall vinklar. Bokstäverna u, v betecknar axlarna i det koordinatsystem där enhetscirkeln är inritad. u står för den vågräta axeln och v står för den lodräta axeln. Allmänt låter vi även $n \in \mathbf{Z}$. Vi delar in ekvationerna i tre typer.

$$\sin x = \sin y$$

När x och y är två vinklar gäller ekvationen $\sin x = \sin y$ om $x = y$ eller $\pi - x = y$, på varvet när. Detta innebär att $\sin x$ och $\sin y$ har samma v -koordinat.



Figur 5.14: $\sin x = \sin y$. Till vänster åskådliggörs att $\sin y = \sin(\pi - y)$ och till höger visas idén med uttrycket ”på varvet när”, dvs. för varje heltal n gäller att $\sin y = \sin(y + 2\pi n)$.

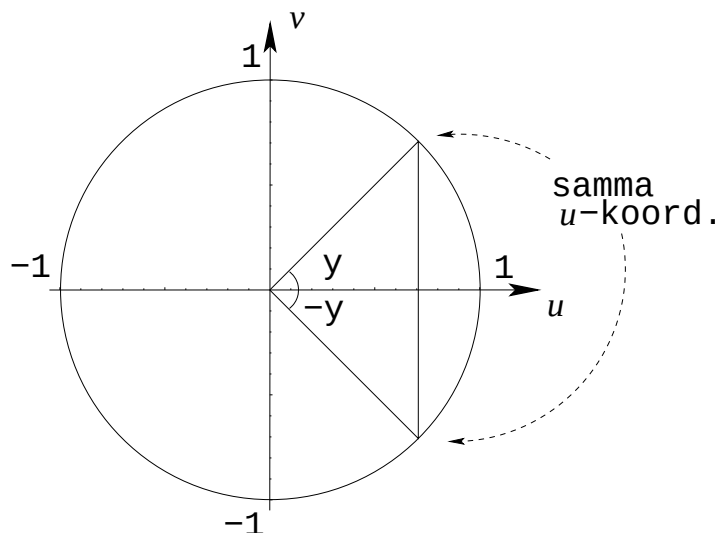
Alltså gäller det att:

$$\sin x = \sin y \iff x = y + 2\pi n \vee x = \pi - y + 2\pi n.$$

¹Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 5 kapitel 22.

$$\underline{\cos x = \cos y}$$

Ekvationen $\cos x = \cos y$ gäller om periferipunkten för vinklarna x och y har samma u -koordinat. Dessa är lika om $x = y$ eller om $x = -y$, på varvet när.



Figur 5.15: $\cos x = \cos y$

Det gäller alltså att:

$$\cos x = \cos y \iff x = y + 2\pi n \vee x = -y + 2\pi n.$$

$$\underline{\tan x = \tan y}$$

För ekvationen $\tan x = \tan y$ måste man först försäkra sig om att båda leden är definierade, d.v.s. att

$$x, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Tangensfunktionen π -periodisk, så att $\tan x = \tan(x + n\pi)$ för varje heltal n . Det faktum att tangensfunktionen är strängt växande (och därför injektiv) i varje intervall med längden π på formen

$$I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[, \quad n \in \mathbf{Z}$$

ger för x, y i samma intervall I_n att $\tan x = \tan y \iff x = y$. Med beaktande av π -periodiciteten fås sammanfattningsvis att

$$\tan x = \tan y \iff x = y + n\pi.$$

Exempel 5.27 Lös ekvationen

$$\sin x = \sin 3x$$

Lösning:

$D = \mathbf{R}$. Det måste enligt lösningsformeln för sinusekvationer gälla att

$$x = 3x + 2\pi n \vee x = \pi - 3x + 2\pi n \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Vi löser de två fallen separat.

$$1. x = 3x + 2\pi n \iff -2x = 2\pi n \iff x = -\pi n$$

$$2. x = \pi - 3x + 2\pi n \iff 4x = (2n + 1)\pi \iff x = (2n + 1)\pi/4$$

Alla x som kan skrivas på någon av ovanstående former ($n \in \mathbf{Z}$) löser ekvationen, så

$$L = \{\pi m | m \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{ \frac{2n+1}{4}\pi | n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Exempel 5.28 Lös ekvationen

$$\cos 2x = -\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Lösning:

$D = \mathbf{R}$. Denna ekvation är inte på en form som gör att vi direkt kan tillämpa lösningsformeln. Vi kan dock omskriva ekvationen med hjälp av formlerna för trigonometriska funktioner. Detta görs som följer:

$$\cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right). \quad (\text{komplementvinkel})$$

Minustecknet framför HL i ekvationen fås bort genom att tillämpa att sinusfunktionen är udda. Vi får:

$$-\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Lösningsformeln kan nu tillämpas på den omskrivna (ekvivalenta) ekvationen:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \sin \left(-2x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vi får:

$$\frac{\pi}{2} - 2x = -2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \vee \frac{\pi}{2} - 2x = \pi + 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$1. \frac{\pi}{2} - 2x = -2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \iff 0x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \iff \text{falskt } \forall n \in \mathbf{Z}$$

$$2. \frac{\pi}{2} - 2x = \pi + 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \iff -4x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \iff x = -\frac{\pi}{16} + \frac{n}{2}\pi$$

Fall 1 ger inget bidrag, så lösningsmängden blir

$$L = \left\{ -\frac{\pi}{16} + \frac{n}{2}\pi | n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

I många fall kan exemplen kräva uppfinningsrikedom och omskrivningar, som synes.

Exempel 5.29 Lös ekvationen:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$$

Lösning:

Vi har $D = \mathbf{R}$. Denna ekvation kan, under antagande att $x \neq \pi + 2\pi n$ skrivas som

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}.$$

Eftersom $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ kan vi skriva detta som

$$\tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{3}.$$

Detta ger bidraget

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + n\pi \iff x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Vi måste ännu undersöka vad som händer ifall $x = \pi + 2\pi n$. Då är $\sin(x/2) = \sin(\pi/2 + \pi n) = \pm 1$ och $\cos(x/2) = \cos(\pi/2 + \pi n) = 0$. Ekvationen blir alltså $\pm 1 = 0$, dvs. dessa x löser inte ekvationen.

Vi får

$$L = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Exempel 5.30 Lös ekvationen:

$$\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$$

Lösning:

$D = \mathbf{R}$. Här kan vi försöka oss på en omskrivning. Eftersom vi har att $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, så kan vi istället lösa ekvationen

$$-2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0.$$

Genom variabelbytet $t = \sin x$ fås:

$$-2t^2 - 3t + 2 = 0$$

Detta är en andragradsekvation som har lösningarna:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-2)2}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4}$$

$$\therefore t = -2 \vee t = \frac{1}{2}.$$

Lösningen $t = -2$ förkastas eftersom $-1 \leq \sin x \leq 1$. Vi behöver nu lösa ekvationen

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}.$$

Vi får alltså följande lösningar:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \iff$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Då $D = \mathbf{R}$ fås

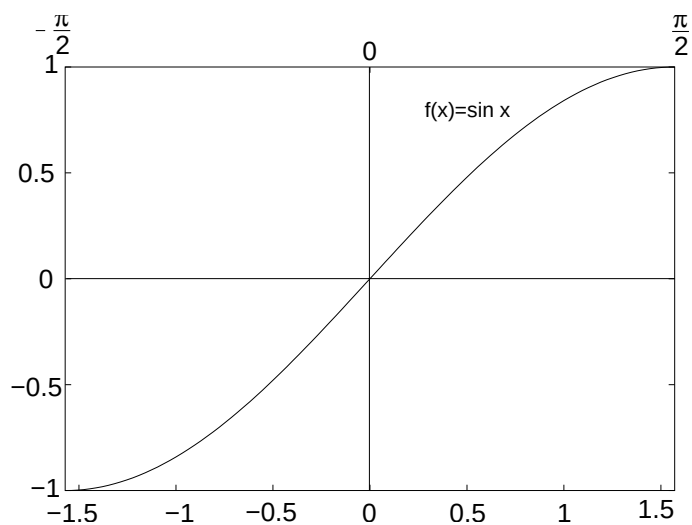
$$L = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

5.8.2 Arcusfunktionerna

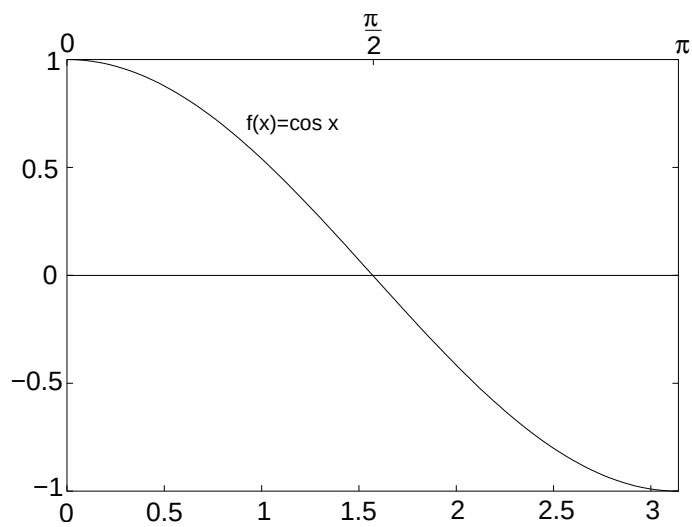
Det är inte tillräckligt att kunna lösa ekvationer av typen $f(x) = k$, där f är en cosinus, sinus eller tangensfunktion och k är en konstant, enbart i de (orealistiska) fall där k råkar hittas i någon tabell. Vi ska se hur man hittar numeriskt närmevärde till lösningen för godtyckliga k . Vi definierar för detta ändamål arcusfunktionerna.

Vi vet ju att sinusfunktionen inte är injektiv på $\mathbf{R}$, men om vi däremot begränsar oss till $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, så är $\sin x$ injektiv. På detta intervall antar $\sin x$ alla värden i $[-1, 1]$.

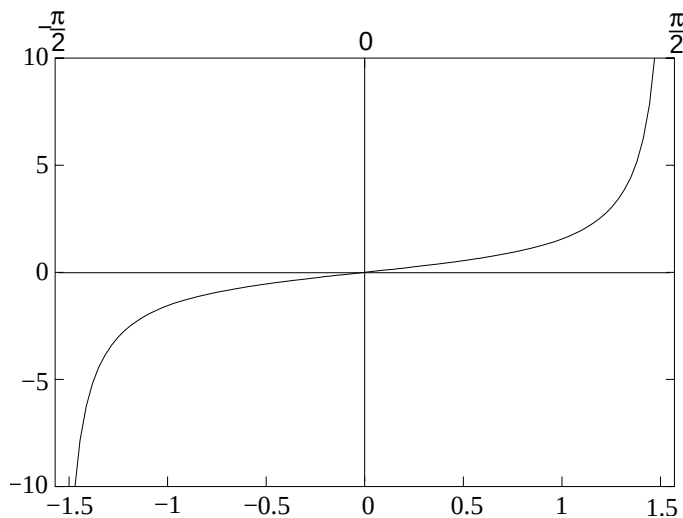
Vi har alltså att sinusfunktionen är en bijektion, och således inverterbar, från $[-\pi/2, \pi/2]$ till $[-1, 1]$. På motsvarande sätt är cosinusfunktionen en bijektion från $[0, \pi]$ till $[-1, 1]$. Tangensfunktionen är en bijektion från $] - \pi/2, \pi/2[$ till $\mathbf{R}$. Se figurerna.



Figur 5.16: Sinusfunktionen blir injektiv, om vi begränsar den till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Dess värdemängd är fortfarande $[-1, 1]$.



Figur 5.17: Cosinusfunktionen är en bijektion från $[0, \pi]$ till $[-1, 1]$.



Figur 5.18: Tangensfunktionen är en bijektion från $] -\pi/2, \pi/2[$ till $\mathbf{R}$.

Det blir meningsfullt att göra följande definition.

Definition 5.31 Vi definierar inverserna till sinus-, cosinus- och tangensfunktionerna.

1. Inversen till $\sin x$ betecknas $\arcsin x$ och definieras som följer:

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

2. Inversen till $\cos x$ betecknas $\arccos x$ och definieras genom

$$y = \arccos x \iff \cos y = x \wedge y \in [0, \pi].$$

3. Inversen till $\tan x$ betecknas $\arctan x$ och definieras genom

$$y = \arctan x \iff \tan y = x \wedge y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dessa tre funktioner uttalas "arcussinus", "arcuscosinus" respektive "arcustangens".

Sats 5.32 Vi har gjort vår definition så, att

1.

$$D_{\arcsin} = [-1, 1] \quad V_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

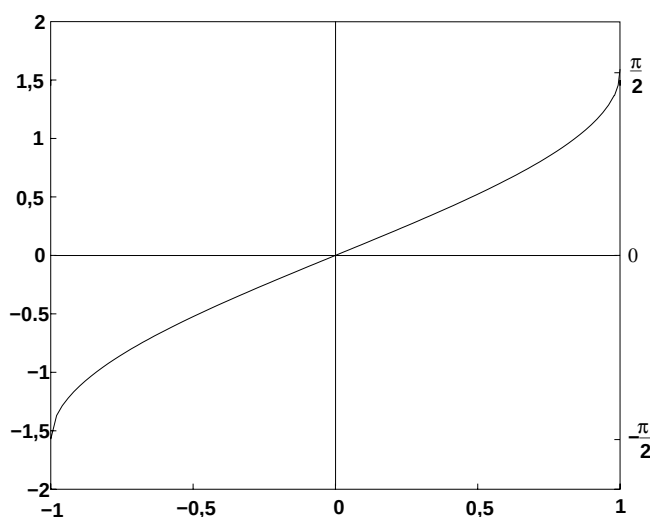
2.

$$D_{\arccos} = [-1, 1] \quad V_{\arccos} = [0, \pi]$$

3.

$$D_{\arctan} = \mathbf{R} \quad V_{\arctan} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Alla dessa tre funktioner är (naturligtvis) bijektiva. Se figur.



Figur 5.19: Arcussinusfunktionen tillåter oss att lösa ut vinklar i praktiska tillämpningar.

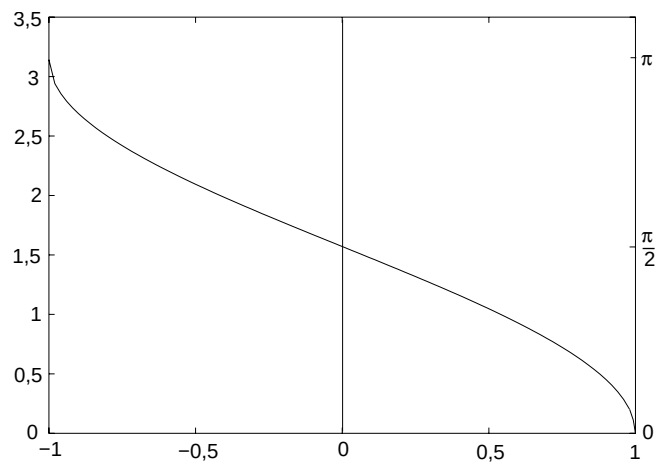
Exempel 5.33 Sidorna i en rätvinklig triangel uppmäts till 3, 4 och 5 cm. Bestäm vinklarna i triangeln.

Lösning:

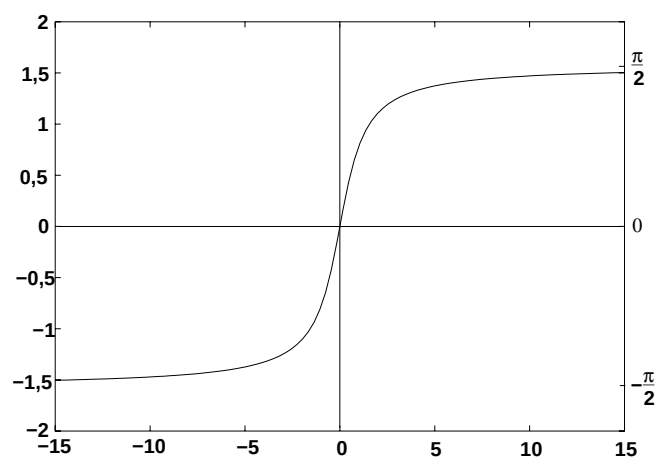
Vi vet att en vinkel är rät, dvs. $\pi/2$ rad. Den längsta sidan måste vara hypotenusan. Kalla den c och få $c = 5$. Kalla de båda kateterna $a = 3$ och $b = 4$. Kalla vidare vinkeln som står mot a för α och den sista vinkeln β . Se figuren.

Vi har att $\tan \alpha = a/b$, dvs. $\alpha = \arctan 3/4 \approx 0,64350$ (ca ett tiondedels varv, varför?). Nu kunde vi lätt räkna ut $\beta = \pi - \pi/2 - \alpha$, men vi använder istället att $\sin \beta = b/c$, så $\beta = \arcsin 4/5 \approx 0,92730$ (ca $1/7$ varv).

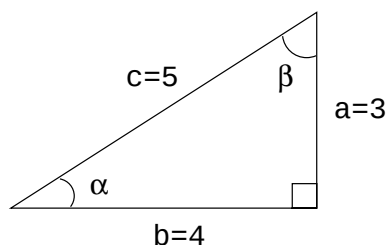
Vi kontrollerar ännu att $\pi - \pi/2 - \alpha \approx 0,92730 \approx \beta$. OK. Vi svarar alltså $\pi/2, \arctan 3/4 \approx 0,64350$ och $\arcsin 4/5 \approx 0,92730$.



Figur 5.20: Arcuscosinusfunktionen.



Figur 5.21: Arcustangensfunktionen.



Figur 5.22: Triangeln i exempel 5.33. (Inte skalenlig.)

Anmärkning 5.34 På miniräknare betecknas arcusfunktionerna ofta med $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ och $\tan^{-1}$.

Då man löser trigonometriska ekvationer måste man komma ihåg, att man bara bestämmer en lösning med arcusfunktionerna. Utgående från denna ena lösning kan man ofta sedan bestämma alla lösningar.

Exempel 5.35 Lös ekvationen a) $\sin x = e$ b) $1/\sin x = e$.

Lösning:

a) $D = \mathbf{R}$, men $V_{\sin} = [-1, 1]$, så värdet $e \approx 2,7$ antas aldrig.

$$\therefore \underline{L = \emptyset}$$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{n\pi | n \in \mathbf{Z}\}$, dvs. D består av de punkter där sinusfunktionen är olik noll. Då kan vi skriva om ekvationen enligt följande:

$$\frac{1}{\sin x} = e \iff \sin x = \frac{1}{e} \iff \sin x = \sin \left(\arcsin \frac{1}{e} \right) \iff$$

$$x = \arcsin \frac{1}{e} + 2\pi n \vee x = \pi - \arcsin \frac{1}{e} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

ty frågeställningen är att bestämma lösningsmängden, dvs. alla x som löser ekvationen. ($\arcsin(1/e) \approx 0.37673$ (rad)) Se figuren.

$$\therefore L = \left\{ \arcsin \frac{1}{e} + 2\pi n | n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\arcsin \frac{1}{e} + (2n+1)\pi | n \in \mathbf{Z} \right\}$$

