

Kapitel 4

Funktioner

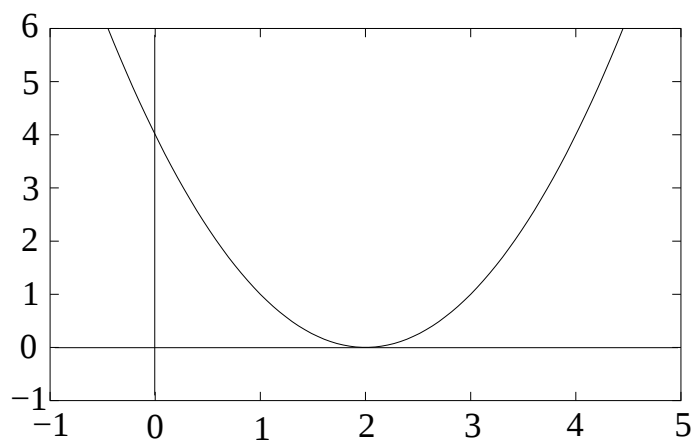
I det här kapitlet kommer vi att undersöka funktionsbegreppet. I de första sektionerna genomgås definitionen av begreppet funktion och vissa egenskaper som funktioner har. I slutet av kapitlet presenteras några vanliga funktioner.

4.1 Definitioner

Från tidigare har vi många gånger stött på olika funktioner. Ett exempel är:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4,$$

vars graf är skisserad i figur 4.1.



Figur 4.1: Funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Vad är det som gör $f(x)$ till en funktion? Begreppet funktion definieras allmänt som:

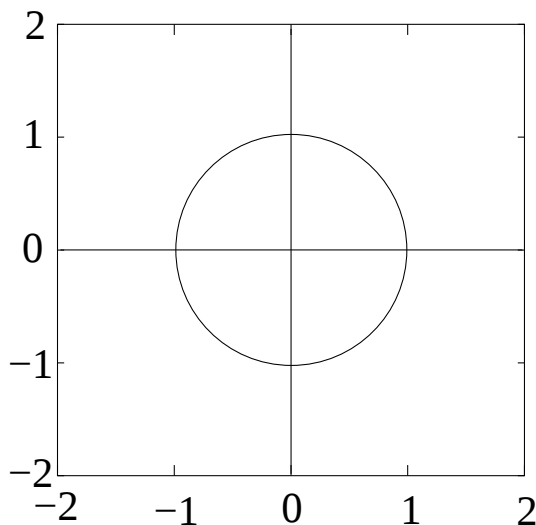
Definition 4.1 *En funktion från mängden A till mängden B är en mängd talpar (x, y) , som uppfyller villkoret att det för varje x i A finns ett och endast ett y i B så att $y = f(x)$.*

En funktion är alltså en regel f som använder talen x i mängden A . Genom att använda dessa tal enligt regeln erhålls tal i mängden B . Ett villkor i definitionen är att man för ett x skall få ett och endast ett y . Om vi återknyter detta till funktionen vi sett på tidigare så är $x^2 - 4x + 4$ egentligen en *regel*. I funktionen används olika värden på x för att få värden på y . De erhållna värdena kallas funktionsvärden.

Den mängd som betecknades med A i definitionen brukar kallas *definitionsomängd*. Mängden B kallas *värdemängd*. Om vi återknyter till figuren är definitionsomängden de värden som sätts in i funktionen, d.v.s x -värdena. De värden som funktionen antar är värdemängden, d.v.s. y -värdena. Eftersom man tänker sig att en funktion använder tal i en definitionsomängd och avbildar dessa på en värdemängd skrivs funktionsbeteckningen även som

$$f : D_f \rightarrow V_f.$$

Kurvan $y^2 + x^2 = 1$ beskriver ingen funktion. En skissering av kurvan finns i figur 4.2. Vi ser att figuren föreställer en cirkel med radien 1.



Figur 4.2: Kurvan $y^2 + x^2 = 1$.

För varje x -värde i intervallet $] -1, 1[$ finns två motsvarande y -värden. För en funktion bör det gälla att det existerar ett och endast ett y -värde för varje x -värde.

Exempel 4.2 Funktionen $f(x) = x^2 + 4$. Bestäm $f(x + 2)$.

Lösning:

$$f(x + 2) = (x + 2)^2 + 4 = x^2 + 4x + 8$$

Exempel 4.3 Funktionen $f(x + 2) = 2x^2 - 3$. Beräkna först $f(5)$. Bestäm sedan $f(x)$.

Lösning:

$$f(5) = f(3 + 2) = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$$

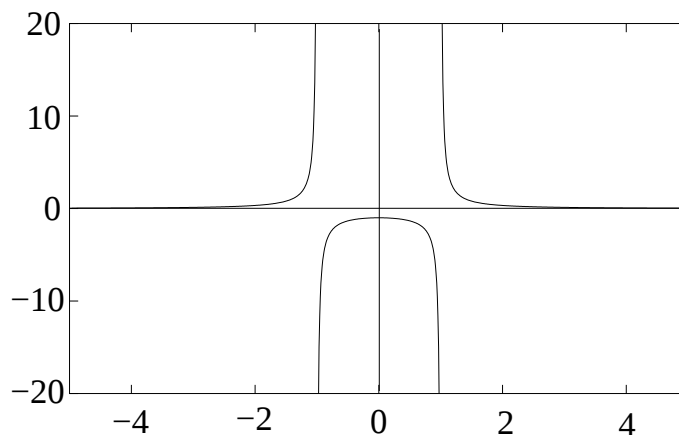
och

$$f(x) = f(x - 2 + 2) = f((x - 2) + 2) = 2(x - 2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5.$$

Exempel 4.4 Funktionen $f(x)$ är definierad genom:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Bestäm definitionsmängden för denna samt uppskatta värdemängden utgående från grafen (som ges).



Figur 4.3: Funktionen $f(x) = 1/(x^2 - 1)$.

Lösning:

För rationella funktioner vet vi från tidigare att definitionsmängden är hela den reella axeln föutom nämnarens nollställen. Eftersom

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

är nollställena för nämnaren $\{-1, 1\}$. Detta betyder att

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Observera hur funktionen beter sig nära nämnarens nollställen.

Värdemängden kan vi utläsa från y -axeln. Den anger ju vilka värden funktionen antar.

Från figuren verkar det som om funktionsvärdena skulle gå mot noll när x går längre från y -axeln. När x närmar sig ett går funktionsvärdena mot plus/minus oändligheten beroende på från vilket håll man kommer. Funktionen verkar aldrig anta värdet noll (ty ekvationen $1/(x^2 - 1) = 0$ saknar lösning).

Vi har bestämt värdemängden för funktionen grafiskt:

$$V_f =]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$$

Om man vill undersöka en funktions f värdemängd analytiskt (dvs. inte endast utifrån grafen), så är det ofta bra att återgå till definitionen på värdemängd:

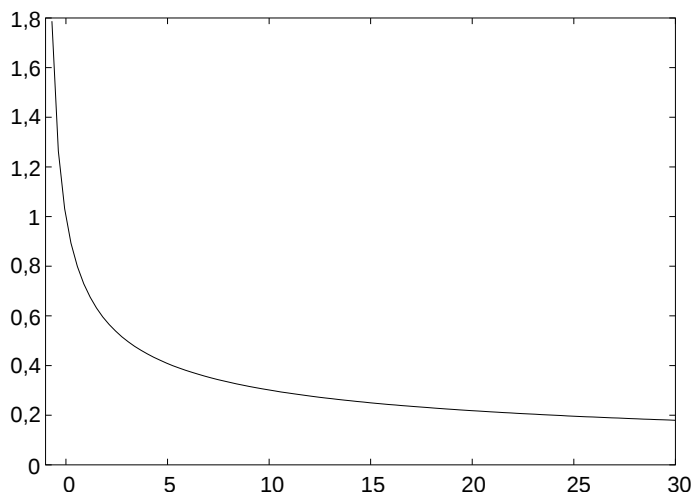
$$y \in V_f \iff \exists x \in D_f : f(x) = y$$

Detta görs i ett exempel på nästa sida.

Exempel 4.5 Bestäm värdemängden för $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$.

Lösning:

$D =]-1, \infty[$. Vi skisserar kurvan och ser att värdemängden verkar kunna vara $]0, \infty[$.



Vi undersöker detta analytiskt. Ta först godtyckligt $y > 0$. Vi försöker finna ett $x \in D$, som är sådant att $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 1/\sqrt{1+x} = y \iff^1) \sqrt{1+x} = \frac{1}{y} \iff^2) 1+x = \frac{1}{y^2} \\ &\iff x = \frac{1}{y^2} - 1 \end{aligned}$$

Vi har att $x = 1/y^2 - 1 > -1 \iff 1/y^2 > 0 \iff$ sant, så vår kandidat x ligger alltså i D .

Motiveringar:

1) Vi har antagit att $y \neq 0$ och kvadratroten är här strängt positiv, så vi kan multiplicera ekvationen med $\sqrt{x+1}/y \neq 0$.

2) Vi antar i detta skede, att $y > 0$, så $1/y \geq 0$ och vi kan utan vidare kvadrera.

Vi har nu visat, att för godtyckligt (dvs. alla) $y > 0$, så finns ett motsvarande $x \in D$, så att $f(x) = y$. Alla $y > 0$ ligger således i värdemängden.

Nu ska vi visa, att för alla $y \leq 0$ gäller, att $y \notin V_f$. Detta gör vi så att vi visar, att ekvationen $f(x) = y$ saknar lösningar i detta fall. Vi ser direkt att VL av $f(x) = y$ endast antar strängt positiva värden, eftersom vi har en kvot av två strängt positiva tal. Eftersom högerledet nu är negativt enligt

antagande, får vi att ekvationen saknar lösning. Dvs. inte ett enda $y \leq 0$ ligger i V_f .

Vi har alltså visat att y ligger i V_f om och endast om $y > 0$, dvs. $V_f =]0, \infty[$, som vi gissade.

Anmärkning 4.6 Vi skisserade förvisso funktionens graf, men vi har inte använt den till annat än att gissa värdemängden. Detta för att det i allmänhet är lättare att bevisa något, om man vet vad man vill bevisa.

4.1.1 Jämna och udda funktioner

Definition 4.7 Funktionen f är en jämn funktion om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$f(-x) = f(x)$$

Exempel 4.8 Funktionen $f(x) = x^2$ är jämn ty

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Alltså gäller att:

$$f(-x) = f(x).$$

Definition 4.9 Funktionen f är en udda funktion om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$f(-x) = -f(x)$$

Exempel 4.10 Funktionen $f(x) = x^3$ är udda ty

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Alltså gäller att:

$$f(-x) = -f(x).$$

Exempel 4.11 Funktionen $f(x) : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$:

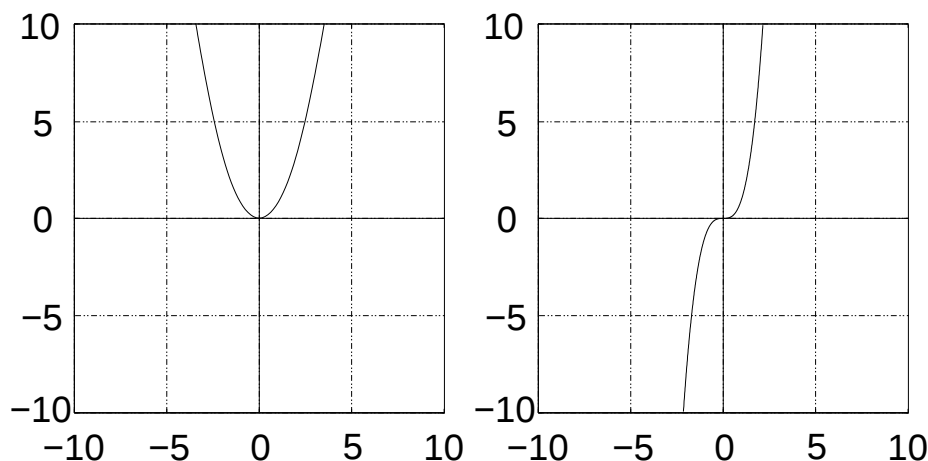
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

är också jämn. Se figur 4.3 och bevisa påståendet som en övning. Visa också att

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

är udda.

Exempel 4.12 Visa med motexempel att funktionen $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ från exempel 4.5 varken är jämn eller udda, dvs. sök ett sådant $x \in D_f$, att $f(-x) \neq \pm f(x)$. Varför räcker det med att hitta ett enda sådant x ?



Figur 4.4: Till vänster funktionen $f(x) = x^2$. En egenskap som jämna funktioner har är att de är *symmetriska* m.a.p. y -axeln. (Dvs. om punkten (x, y) ligger på kurvan så gör också $(-x, y)$ det.) Till höger funktionen $f(x) = x^3$. En egenskap som udda funktioner har är att de är *symmetriska* m.a.p. origo. (Om punkten (x, y) ligger på kurvan så gör också $(-x, -y)$ det.)

4.2 Sammansatta funktioner

Idén med sammansatta funktioner¹ är att vi låter en funktion operera på en annans funktionsvärde. Sammansatta funktiner definieras enligt:

Definition 4.13 Vi antar att f och g är två funktioner, sådana att f :s värdemängd har gemensamma element med g :s definitionsmängd, vilket kan skrivas kort som $V_f \cap D_g \neq \emptyset$. Den **sammansatta funktionen** $(g \circ f)(x)$ av f och g fås då g opererar på f :s funktionsvärden, d.v.s.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

för de $x \in D_f$ som är sådana att $f(x) \in D_g$. Beteckningen $g \circ f$ utläses ” g boll f ”.

Exempel 4.14 Vi definierar funktionerna g och f enligt:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = 1 - x^2$$

Visa att man kan bilda den sammansatta funktionen $g \circ f$. Bestäm $g \circ f$ samt rita graf av denna. Vilken är definitionsmängden och värdemängden för den

¹Oinas-Kukkonen m.fl.kurs 5, kapitel 4.

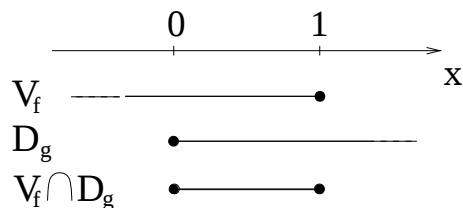
sammansatta funktionen? Är $g \circ f = f \circ g$?

Lösning:

Kravet för att bilda den sammansatta funktionen $g(f(x))$ är att $V_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Nu gäller att:

$$V_f =]-\infty, 1] \quad \text{och} \quad D_g = [0, \infty[\quad \implies \quad V_f \cap D_g = [0, 1] \neq \emptyset$$



Figur 4.5: Bestämning av $V_f \cap D_g$. $V_f \cap D_g$ är inte tom, eftersom mängden innehåller alla reella tal mellan 0 och 1.

Den sammansatta funktionen $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Definitionsmängden för $g \circ f$ fås ur kravet $1 - x^2 \geq 0$.

$$D = [-1, 1]$$

Enhetscirkeln har ekvationen $y^2 = 1 - x^2$. Den sammansatta funktionen $g \circ f$ består av den övre halvan av denna. (Se figur 4.6.)

$$V_{g \circ f} = [0, 1]$$

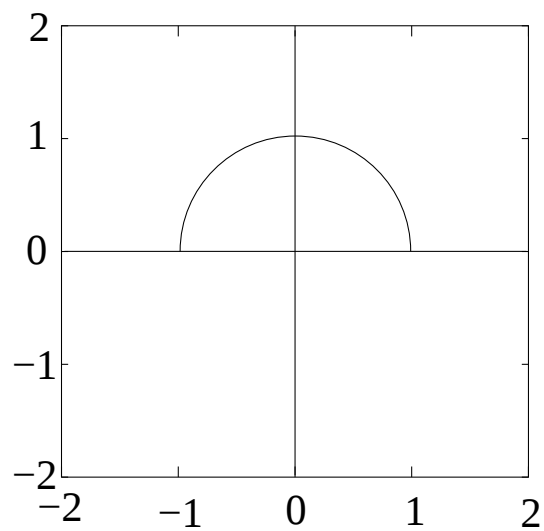
För att undersöka om $g \circ f = f \circ g$ bildas $f \circ g$.

$$V_g = [0, \infty[, D_f = \mathbf{R}. \implies V_g \cap D_f = [0, \infty[\neq \emptyset$$

Bildar $f \circ g$:

$$f \circ g = f(g(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x.$$

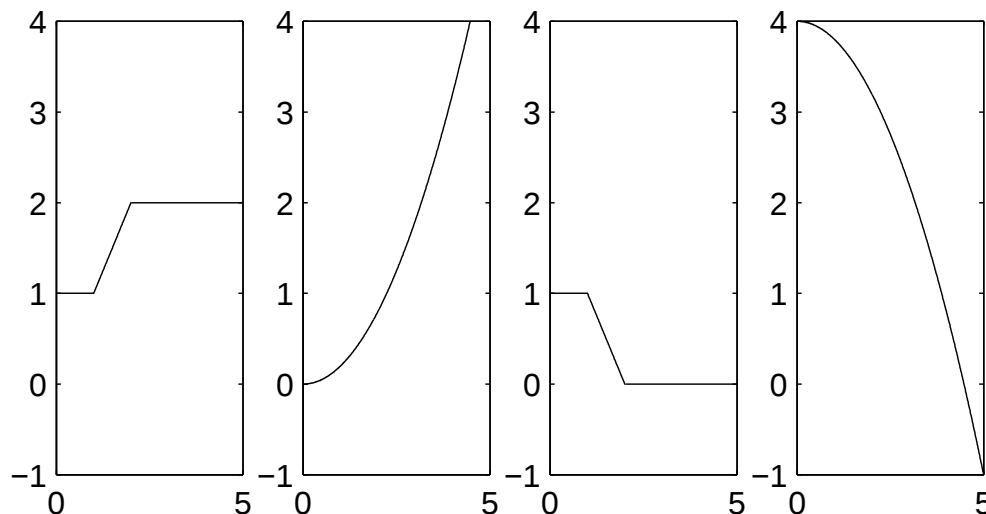
$$\therefore \quad f \circ g \neq g \circ f.$$



Figur 4.6: Den sammansatta funktionen $g \circ f$. Den är bildad av funktionerna $f(x) = 1 - x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$.

4.3 Växande och avtagande funktioner

Nu kommer vi att se på hur funktionsvärdena hos en funktion ändras när x ändras. Den grafiska tolkningen av växande och avtagande funktioner är lättförståelig.²



Figur 4.7: Exempel på funktioner som är (från vänster) växande, strängt växande, avtagande och strängt avtagande.

Förutom den grafiska tolkningen som finns presenterad i figur 4.8 kan vi också ge en analytisk definition:

Definition 4.15 En funktion f i ett intervall $I \subseteq D_f$ är

växande	, om i $I : x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$
strängt växande	, om i $I : x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$
avtagande	, om i $I : x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$
strängt avtagande	, om i $I : x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$

Ytterligare brukar en funktion som är strängt växande eller strängt avtagande kallas *strängt monoton* medan en funktion som är antingen växande eller avtagande kallas *monoton*.

²Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 5 kapitel 3

Exempel 4.16 Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

är strängt avtagande i intervallet $] -1, \infty[$.

Lösning:

Tag x_1 och x_2 , så att $x_2 > x_1 > -1$. om det nu gäller att $f(x_2) < f(x_1)$ är funktionen strängt avtagande.

$$f(x_1) > f(x_2) \iff \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \quad (*)$$

Eftersom båda sidorna är positiva kan vi multiplicera bort nämnarna i $(*)$ med bibehållen riktning på olikhetstecknet.

$$(*) \iff x_2 + 1 > x_1 + 1 \iff x_1 < x_2$$

Den sista utsagan vet vi att är sann. Funktionen är alltså strängt avtagande i intervallet.

Följande sats gäller:

Sats 4.17 1. Om funktionen f är

$$\begin{array}{ll} \text{strängt växande} & , \text{ gäller } x_2 > x_1 \iff f(x_2) > f(x_1) \\ \text{strängt avtagande} & , \text{ gäller } x_2 > x_1 \iff f(x_2) < f(x_1) \\ \text{strängt monoton} & , \text{ gäller } x_2 = x_1 \iff f(x_2) = f(x_1) \end{array}$$

2. Om funktionen f är

$$\begin{array}{ll} \text{växande} & , \text{ gäller } f(x_2) > f(x_1) \implies x_2 > x_1 \\ \text{avtagande} & , \text{ gäller } f(x_2) > f(x_1) \implies x_2 < x_1 \\ \text{monoton} & , \text{ gäller } f(x_2) \neq f(x_1) \implies x_2 \neq x_1 \end{array}$$

Bevis:

Vi bevisar några fall. De andra kan bevisas på motsvarande sätt.

1. Visar att f strängt växande ger $x_2 > x_1 \iff f(x_2) > f(x_1)$. Att f är strängt växande betyder enligt definitionen att $x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$. Vi har alltså direkt, att om det vänstra påståendet är sant, så är det högra också sant. Antag alltså att det vänstra påståendet är falskt, dvs. $x_2 \leq x_1$. Om $x_2 < x_1$, så ger definitionen av strängt växande funktion igen att $f(x_2) < f(x_1)$ och det högra påståendet är falskt. Om $x_2 = x_1$ har vi ju att $f(x_2) = f(x_1)$, så högra påståendet är falskt också i detta fall. Beviset

för detta fall är klart, eftersom vi har visat att vänster påstående är sant om och endast om det högra är sant.

2. Visar att f avtagande ger $f(x_2) > f(x_1) \implies x_2 < x_1$. Definitionen ger $x_1 > x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$. Vi vet att påståendet $f(x_1) \leq f(x_2)$ är falskt, så vi måste alltså ha $x_1 \leq x_2$. Har vi $x_1 = x_2$ fås naturligtvis $f(x_1) = f(x_2)$, vilket också är falskt. Vi måste alltså ha att $x_1 < x_2$.

■

Anmärkning 4.18 Vi bör, som ovanstående sats visar, vara noggranna att skilja åt monotona och strängt monotona funktioner. Följande exempel är ofta användbart om man funderar på huruvida en egenskap, som gäller för strängt monotona funktioner, också gäller för monotona. Det mesta som kan gå på tok går på tok redan där. Den konstanta funktionen är naturligtvis inte strängt monoton.

Exempel 4.19 Tag den konstanta funktionen $f(x) = 1$. Då gäller det f är växande (varför?), så f är monoton. Vi har att $f(x_1) = f(x_2)$, men vi kan inte dra någon som helst slutsats om x_1 och x_2 här, eftersom alla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ duger.

Exempel 4.20 Lös olikheten

$$f\left(\frac{5x-3}{4}\right) < f\left(\frac{x}{2}\right),$$

då $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är en strängt avtagande funktion.

Lösning:

Enligt satsen ovan gäller, eftersom f är strängt avtagande, att:

$$f\left(\frac{5x-3}{4}\right) < f\left(\frac{x}{2}\right) \iff \frac{5x-3}{4} > \frac{x}{2},$$

då funktionen är strängt avtagande. Denna olikhet kan nu lätt lösas, och

$$2(5x-3) > 4x \iff 6x > 6 \iff x > 1.$$

4.4 Bijektioner

Enligt ovan definieras en funktion utgående från att det för varje x finns ett och endast ett y för vilket det gäller att $y = f(x)$. Detta hindrar inte att det för två olika x -värden, säg x_1 och x_2 , gäller att $y = f(x_1) = f(x_2)$. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^2$ där t.ex. $f(2) = f(-2) = 4$.

Vi skriver också för t.ex. $f(x) = \sqrt{x}$, att $f : \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, fastän $\mathbf{R}$ också innefattar negativa värden och kvadratrotsfunktionen inte antar sådana.

En funktion som har den egenskapen att varje y -värde motsvaras av *exakt* ett x -värde kallas *bijektion*.

Definition 4.21 Funktionen $f : A \rightarrow B$ är **injektiv** (eller en *injektion*), om det gäller att olika $x \in A$ avbildas på olika $y \in B$, dvs ($\forall x_1, x_2 \in A$).

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funktionen $f : A \rightarrow B$ är **surjektiv** (eller en *surjektion*) från A till B , om det gäller att för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$, som är sådant att $f(x) = y$. Alternativt kan man skriva att $V_f = B$ eller

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y.$$

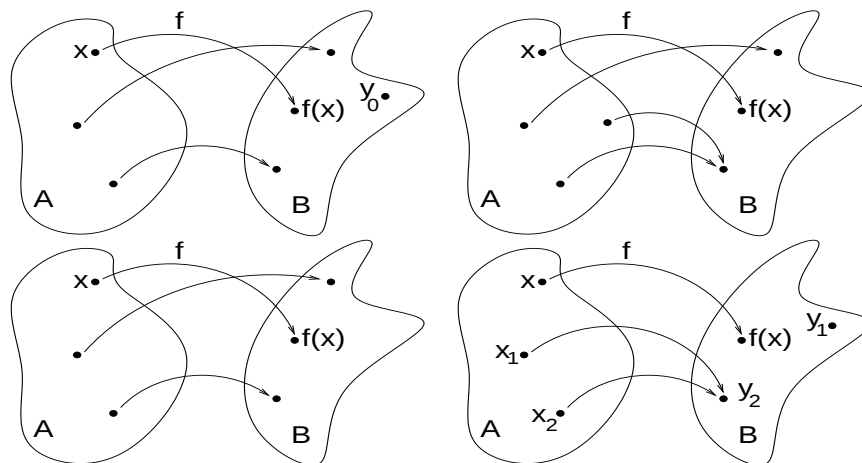
Funktionen $f : A \rightarrow B$ är **bijektiv** (eller en *bijektion*) från A till B om varje $y \in B$ motsvaras av *exakt* ett x i A , dvs.

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y,$$

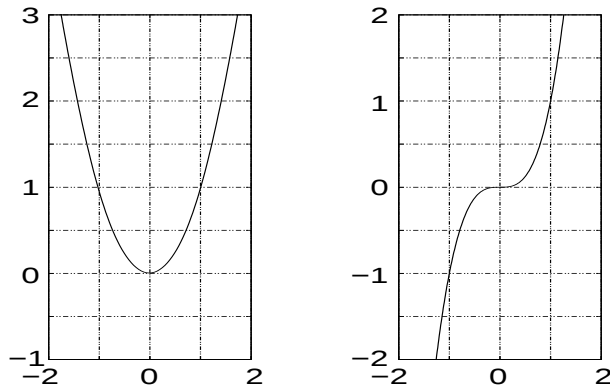
där beteckningen $\exists!$ betyder att "det existerar exakt ett". ($\exists$ betyder ju att det existerar minst ett.) För en grafisk tolkning, se figur 4.8.

Vi ser att en funktion är bijektiv (varje y har precis ett motsvarande x) om och endast om den är surjektiv (varje y har minst ett motsvarande x) och injektiv (varje y har högst ett motsvarande x).

Vi ser att varje injektiv funktion är en bijektion från sin definitionsmängd till sin värdemängd.



Figur 4.8: Den första figuren visar hur en injektion avbildar varje $x \in A$ på olika $y \in B$, eftersom inget element i B har *flera* inkommande pilar. Den andra figuren visar en surjektiv funktion, eftersom varje element i B har *minst en* inkommande pil. Den tredje funktionen är en bijektion, eftersom varje element i B har *exakt en* inkommande pil. Den fjärde figuren föreställer en funktion som är varken surjektiv eller injektiv, eftersom x_1 och x_2 båda avbildas på y_2 (dvs. f är inte injektiv) och inget $x \in A$ avbildas på y_1 (dvs. f är inte surjektiv).



Figur 4.9: Funktionen till vänster, $f(x) = x^2$ är inte en injektion från $\mathbf{R}$ (och således inte heller en bijektion därifrån). T.ex. för $y = 1$ finns både $x_1 = 1, x_2 = -1$, sådana att $f(1) = f(-1) = 1$. Däremot är f en injektion från $\mathbf{R}_+$. Funktionen till höger, $g(x) = x^3$ är en bijektion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$. För varje reellt y -värde finns exakt ett reellt x -värde sådant att $g(x) = y$.

4.5 Invers funktion

Vi undersöker funktionen f som är en bijektion. Då måste det gälla att varje $x \in D_f$ motsvaras av exakt ett $y \in V_f$. Vad vi är intresserade är att bilda en funktion, vars definitionsmängd är V_f och värdemängd är D_f .

Definition 4.22 En bijektion $f : D_f \rightarrow V_f$ har en **invers funktion** $f^{-1} : V_f \rightarrow D_f$ som definieras av sambandet:

$$\forall y \in V_f : f^{-1}(y) = x,$$

där $x \in D_f$ och $f(x) = y$.

Vidare gäller att $D_f = V_{f^{-1}}$ och $V_f = D_{f^{-1}}$.

Exempel 4.23 Antag att funktionen f är en bijektion. Bestäm $f(-3)$ då $f^{-1}(6) = -3$.

Lösning:

Eftersom $f^{-1}(6) = -3$, så måste det enligt definitionen av invers funktion gälla att $f(-3) = 6$.

Sats 4.24 Varje strängt monoton funktion $f : D_f \rightarrow V_f$ är en bijektion som har en invers funktion $f^{-1} : V_f \rightarrow D_f$ med samma typ av sträng monotonitet.

Bevis:

Vi bör visa att varje strängt monoton funktion f är bijektiv från D_f till V_f . Då ger definitionen av invers att inversen existerar och vi bör då visa att monotoniteten bibehålls.

Definitionen på värdemängd ger att $y \in V_f \iff \exists x \in D_f : f(x) = y$, så varje funktion är en surjektion till sin värdemängd.

Satsen om monotona funktioner ger att $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, så f är en injektion och därför en bijektion. Definitionen av invers funktion ger nu alla påståenden utom att monotoniteten bevaras.

Antag t.ex. att f är strängt växande. Klart att $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in D_f$. Vi betecknar $y_i = f(x_i)$, använder att f är strängt växande och får

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\iff f(x_2) > f(x_1) && \text{dvs.} \\ f^{-1}(f(x_2)) > f^{-1}(f(x_1)) &\iff f(x_2) > f(x_1) && \text{dvs.} \\ f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1) &\iff y_2 > y_1. \end{aligned}$$

Vi har alltså att f^{-1} är strängt växande. Ett analogt bevis utförs för f strängt avtagande.

■

Exempel 4.25 Bestäm den inversa funktionen till funktionen

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = 2x + 1.$$

Lösning:

Funktionen f är strängt växande, alltså strängt monoton.

$\therefore$ inversen existerar

Enligt satsen ovan vet vi också att inversen är strängt växande.

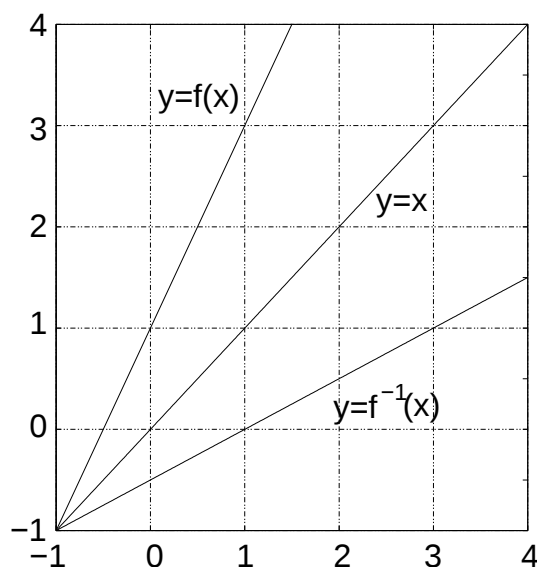
När vi bestämmer inversen löser vi ut x så att vi får en funktion av y .

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}.$$

Byter nu ut x och y . Detta för att få definitionsmängden på x -axeln och värdemängden på y -axeln. Vi får alltså att för inversen gäller $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

Se figuren nedan.



Figur 4.10: $f(x) = 2x + 1$ och $f^{-1} = (x - 1)/2$. Vi ser att f och dess invers är varandras spegelbilder m.a.p. linjen $y = x$. Detta är en egenskap som gäller för allmänna f och dess invers.

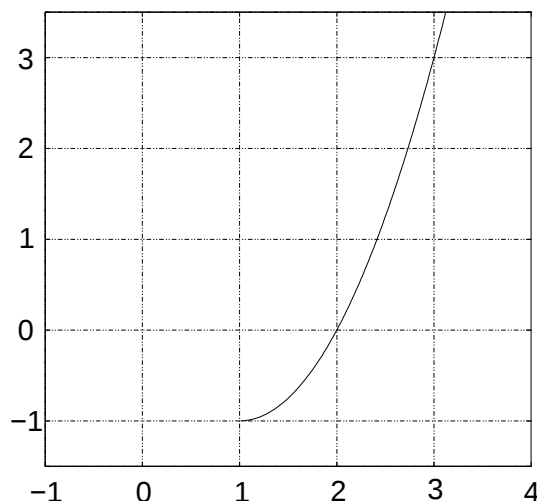
Anmärkning 4.26 I exemplet ovan har vi att $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ för alla $x \in D_f$. Man tar ofta detta villkor som definition på inversen f^{-1} av f . (f är naturligtvis också invers till f^{-1} .)

Exempel 4.27 Visa att f har en invers och bestäm den, då f ges av

$$f : [1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[: f(x) = x^2 - 2x.$$

Lösning:

Ur grafen nedan kan man gissa att funktionen är strängt växande. Vi ska visa det analytiskt.



Figur 4.11: Funktionen $f : [1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[: x^2 - 2x$.

Från sats 4.24 på sidan 85 vet vi att en funktion är strängt växande om det gäller att

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Väljer $x_1, x_2 \in [1, \infty[$. Om vi kan visa att $f(x_1) < f(x_2)$ alltid då $x_1 < x_2$, så är $f(x)$ strängt växande och därmed en bijektion från sin definitionsmängd till sin värdemängd. Detta innebär att inversen existerar.

$$\begin{aligned} f(x_1) < f(x_2) &\iff f(x_1) - f(x_2) < 0 \iff (x_1^2 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2) < 0 \\ &\iff x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 < 0 \\ &\iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) < 0 \\ &\iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) < 0 \end{aligned}$$

Då vi har

$$x_1 < x_2 \iff x_1 - x_2 < 0 \quad \text{och} \quad 1 \leq x_1 < x_2 \implies x_1 + x_2 - 2 > 0,$$

fås att

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) < 0,$$

eftersom ett negativt tal multiplicerat med ett positivt tal är negativt. Därmed är det bevisat att

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Detta innebär att f är strängt växande och med stöd av sats 4.24 fås att **inversen existerar**.

Inversen bildas:

$$y = x^2 - 2x \iff y + 1 = x^2 - 2x + 1 \iff y + 1 = (x - 1)^2$$

Eftersom HL är ickenegativt måste nu $y \geq -1$. Drar kvadratroten ur HL och VL :

$$\pm\sqrt{y+1} = x - 1 \iff x = \pm\sqrt{y+1} + 1$$

Variabelbyte:

$$y = \pm\sqrt{x+1} + 1.$$

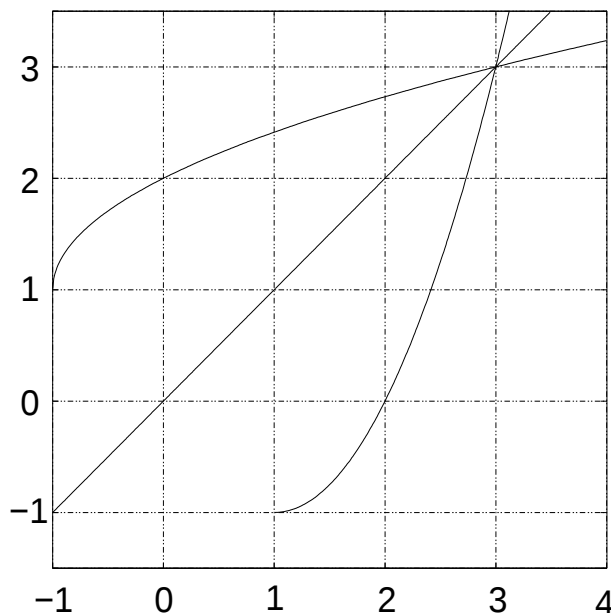
Eftersom $V_{f^{-1}} = D_f$ gäller att

$$y = 1 + \sqrt{x+1}.$$

Anmärkning 4.28 Alternativt bevis av bijektiviteten. Vi vet att kvadratfunktionen $x \rightarrow x^2$ är strängt växande för $x \geq 0$. (Se sats om kvadrering av olikheter och ekvationer i avsnittet om lösning av kvadratrotolikheter.) Kvadratkomplettera och få $f(x) = (x - 1)^2 - 1$. $x \geq 1$ ger $(x - 1)^2$ strängt växande. Att vi adderar en konstant ändrar inte denna egenskap, ty denna additiva konstant tas ut:

$$f(x_2) + c > f(x_1) + c \iff f(x_2) > f(x_1) + c - c \iff f(x_2) > f(x_1)$$

Vi sammanfattar.



Figur 4.12: Funktionen $f : [1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[: x^2 - 2x$ samt dess invers $f^{-1} : [-1, \infty[\rightarrow [1, \infty[: 1 + \sqrt{x+1}$. Notera igen symmetrin med avseende på räta linjen $y = x$.

Egenskaper hos den inversa funktionen. Antag att $f : A \rightarrow B$ har en invers $f^{-1} : B \rightarrow A$. f^{-1} har då följande egenskaper:

1. $(f^{-1})^{-1} = f$, dvs. $\forall x \in D_f : (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.
2. $\forall x : (f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$
3. Om grafen av f har ekvationen $F(x, y) = 0$ har grafen av f^{-1} ekvationen $F(y, x) = 0$. Detta betyder att graferna är varandras spegelbilder m.a.p. linjen $y = x$.

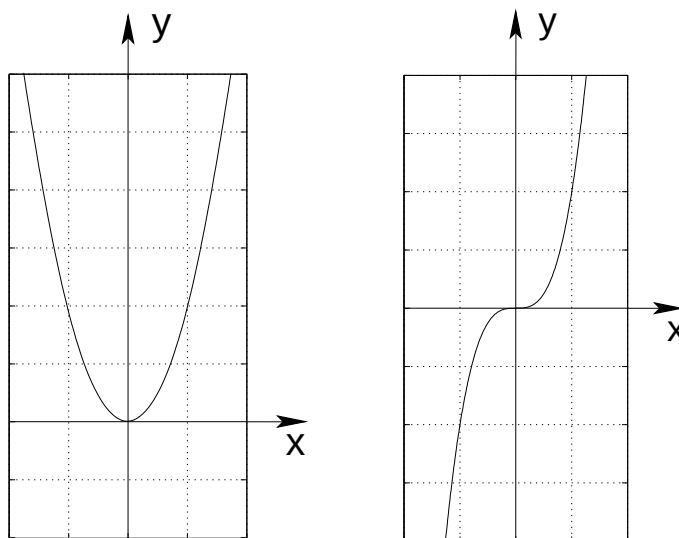
4.6 Några vanliga funktioner

4.6.1 Det allmänna rotbegreppet

Nu³ skall vi undersöka ekvationen

$$x^n = a \quad , \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Beroende på om n är udda eller jämnt har funktionen $f(x) = x^n$ olika utseende.



Figur 4.13: x^n , $n \in \mathbf{Z}$ har olika utseende beroende på om n är jämnt eller udda. Till vänster är n jämnt och till höger är n udda.

Vi ser att för $a \geq 0$ existerar en lösning till ekvationen $x^n = a$, oberoende av om n är jämnt eller udda. För $a < 0$ existerar en lösning endast om n är udda.

Ekvationen $x^2 = 4$ har exempelvis lösningarna $x = \pm 2$, medan lösningen till $x^3 = 8$ är $x = 2$. Det *allmänna rotbegreppet* definieras för $a \geq 0$.

Definition 4.29 Vi antar att $n \in \mathbf{Z}_+$ och $a \geq 0$. Den entydiga icke-negativa lösningen till ekvationen

$$x^n = a$$

kallas *n:te roten ur a* och betecknas

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{eller} \quad a^{\frac{1}{n}}.$$

³Oinas-Kukkonen Kurs 5 kapitel 6

Exempel 4.30 Fjärde roten av 16, $\sqrt[4]{16}$, är 2, ty $2^4 = 16$. Tredje roten av -27 , $\sqrt[3]{-27}$, är -3 , ty $(-3)^3 = -27$.

Lösningarna till ekvationen $x^n = a$ är alltså beroende av tecknet på a och om n är jämnt eller udda. Detta sammanfattas i en sats:

Sats 4.31 Antag att $n \in \mathbf{Z}_+$ och att $a \in \mathbf{R}$. Lösningsmängden till ekvationen:

$$x^n = a$$

är

$$L = \begin{cases} \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} & , \text{ om } n \text{ är jämnt och } a > 0 \\ \{0\} & , \text{ om } a = 0 \\ \emptyset & , \text{ om } n \text{ är jämnt och } a < 0 \\ \{\sqrt[n]{a}\} & , \text{ om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Exempel 4.32 Lös ekvationen:

$$63x^3 = -1$$

Lösning:

$$63x^3 = -1 \iff x^3 = -\frac{1}{63}$$

Här är n udda. Vi får uttrycket

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{63}}.$$

Detta är inte någonting enkelt och trevligt, så vi blir tvungna att ta till närmevärden. Miniräknaren ger att $\sqrt[3]{1/63} \approx 0.25132$, så vårt svar blir $x \approx -0.25132$.

Vi ser att detta ligger mycket nära $-1/4 = 0,25$, så vi kunde också ha "löst" uppgiften i huvudet med överslagsräkning, genom att konstatera att skillnaden mellan $1/63$ och $1/64$ är mycket liten.

Anmärkning 4.33 Om man inte har en miniräknare som klarar n :te rötter, kan man testa använda $1/n$:te potens istället. Vi har ju

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Exempel 4.34 Lös olikheten $x^4 - 80 < 0$.

Lösning:

Vi använder vår allmänna metod och börjar med att söka vänsterledets nollställen.

$$x^4 - 80 = 0 \iff x^4 = 80 \iff x = \pm \sqrt[4]{80}$$

Vi får $\pm$ eftersom vi har x^4 , en jämn potens. Vi petar in $\sqrt[4]{80}$ på miniräknaren och får närmevärdet 2.9907. Vi har alltså att vänsterledets nollställen x_1 och x_2 approximativt ges av $x_1 \approx -2.9907$ och $x_2 \approx 2.9907$.

Vi ritar nu ett teckenschema och testar med x -värden som ligger tillräckligt långt från x_1 och x_2 (vi vill vara säkra på att hamna på rätt sida om nollställena). (Alternativt kan vi konstatera, att grafen för x^4 är mycket lik grafen för x^2 , så teckenväxlingen är densamma.)⁴

x	x_1		x_2		
$x^4 - 80$	+	0	-	0	+

Vi ser att $L =]x_1, x_2[\approx] -2.9907, 2.9907[$. Lösningen är nästan densamma som lösningen till olikheten $x^4 - 81 < 0$, så vi kunde ha använt överslagsräkning här också, ifall vi inte kräver stor noggrannhet.

4.6.2 Det allmänna potensbegreppet

I kapitel 1 behandlades potensen

$$a^n$$

då $a \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Vi kan utvidga begreppet:

Definition 4.35 Antag att $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}_+$ och $a > 0$. Vi definierar

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Definitionen får gälla även för $a = 0$ om $m \in \mathbf{Z}_+$.

De potensregler som behandlades i kapitel 1 gäller fortfarande.

⁴De är ”mycket lika” i den meningen att de har ungefär samma form. Kurvan $y = x^4$ växer naturligtvis mycket snabbare än kurvan $y = x^2$, ty $3^4 = 81$, medan $3^2 = 9$.

Räkneregler 4.36 Antag att $a, b \in \mathbf{R}_+$ och $x, y \in \mathbf{Q}$. Då gäller följande:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^x / a^y = a^{x-y}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $(a/b)^x = a^x / b^x$
5. $(a^y)^x = a^{xy}$
6. $(a/b)^{-x} = (b/a)^x$

Exempel 4.37 Förenkla:

$$\left(\frac{27}{64}\right)^{-2/3}$$

Lösning:

$$\left(\frac{27}{64}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3 \cdot (-2/3)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

4.6.3 Exponentialfunktionen

I denna sektion undersöks funktionen:

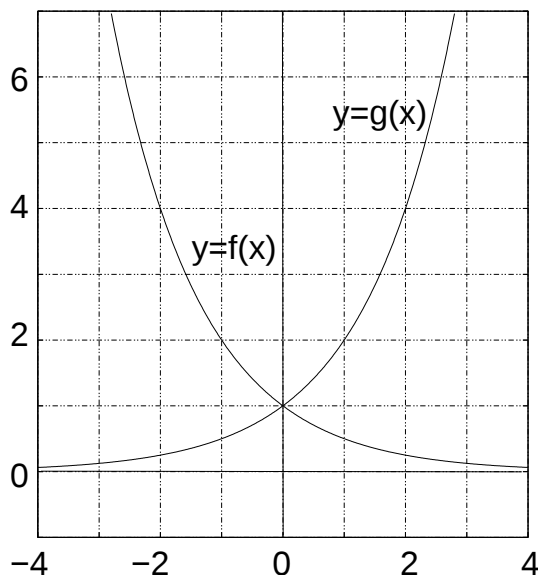
$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ : f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$

Denna funktion kallas *exponentialfunktionen*⁵ med basen a .

Egenskaper hos exponentialfunktionen. Antag att f är definierad som ovan. Då gäller:

1. $D_f = \mathbf{R}$ och $V_f = \mathbf{R}_+$.
2. f är strängt växande för $a > 1$ och strängt avtagande för $0 < a < 1$.
3. $f(0) = 1$, dvs. grafen går alltid genom punkten $(0,1)$.
4. Kurvorna $y = a^x$ och $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ är symmetriska m.a.p. y -axeln.
5. Räkneregler för potenser gäller även för exponentialfunktioner.

⁵Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 5 kapitel 9-10



Figur 4.14: Exponentialfunktionen a^x är strängt avtagande för $0 < a < 1$ och strängt växande för $a > 1$. Grafen föreställer funktionerna $f(x) = (1/2)^x$ och $g(x) = 2^x$. Notera symmetrin runt y -axeln.

Från avsnittet om växande och avtagande funktioner minns vi att om en funktion är strängt växande gäller att:

$$x_2 > x_1 \iff f(x_2) > f(x_1)$$

och för strängt avtagande funktioner:

$$x_2 > x_1 \iff f(x_2) < f(x_1).$$

Exponentialfunktionen är strängt avtagande eller strängt växande, beroende på basen a . Vi minns också att för strängt monotona funktioner gäller att:

$$x_2 = x_1 \iff f(x_2) = f(x_1).$$

Detta kan vi ofta utnyttja då vi löser ekvationer och olikheter med exponentialfunktioner.

Exempel 4.38 Lös olikheten:

$$2^{1-x} < \frac{1}{2}$$

Lösning:

Vi använder att exponentialfunktionen med basen två är strängt växande.

$$2^{1-x} < \frac{1}{2} \iff 2^{1-x} < 2^{-1} \iff 1-x < -1 \iff x > 2.$$

Denna metod kallas för exponentiering.

4.6.4 Logaritmfunktionen

Hittas i Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 5 kapitel 12-15.

Definition av begreppet logaritm

Vid ekvationslösning av typen

$$3^x = 10$$

kan vi inte hitta någon heltalslösning. Vi kan gissa oss till att lösningen är kring 2, eftersom $3^2 = 9$. För att bestämma lösningen till ekvationen definierar vi logaritmen. Vi kallar lösningen $\log_3 10$.

Definition 4.39 *a -logaritmen för talet b med beteckningen $\log_a b$ är den exponent som talet a behöver upphöjas till för att ge talet b . Alltså gäller:*

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Av definitionen följer att $a, b > 0, a \neq 1$.

Räkneregler 4.40 *Följande gäller för $\log_a b$, $a, b, c > 0, a \neq 1$.*

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a b^c = c \log_a b$, $c \in \mathbf{R}$

Exempel 4.41 $\log_{10} 10000 = 4$ eftersom $10^4 = 10000$
 $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ eftersom $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

Exempel 4.42 *De räkneregler som finns ovan kan härledas ur egenskaperna för exponentfunktionen. Med hjälp av de regler som finns givna ovan kan vi också härleda följande regler:*

3. $a^{\log_a b} = b$, $b \in \mathbf{R}_+$
4. $\log_a a^b = b$, $b \in \mathbf{R}$
5. $\log_a \frac{1}{b} = \log_a (b)^{-1} = -\log_a b$
6. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a \left(b \frac{1}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

Exempel 4.43 *Hyfsa:*

$$1 - \log_2 3 + 2 \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} 1 - \log_2 3 + 2 \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= \log_2 2^1 - \log_2 3 + 2 \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \log_2 \left(\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \log_2 2^{-1} = -1 \end{aligned}$$

Logaritmfunktionen

Ur logaritmen kan vi även, genom att låta argumentet variera, bilda *logaritmfunktionen*. Denna har utseendet:

$$f(x) = \log_a x.$$

Eftersom exponentialfunktionen har utseendet

$$y = a^x$$

Kan vi ur sambandet

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

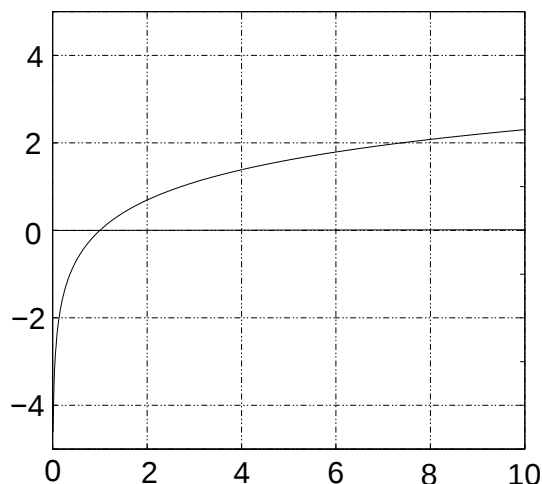
se att logaritmfunktionen och exponentialfunktionen är varandras inverser.

Definition 4.44 Logaritmfunktionen *med basen a , ($a > 0, a \neq 1$) skrivs:*

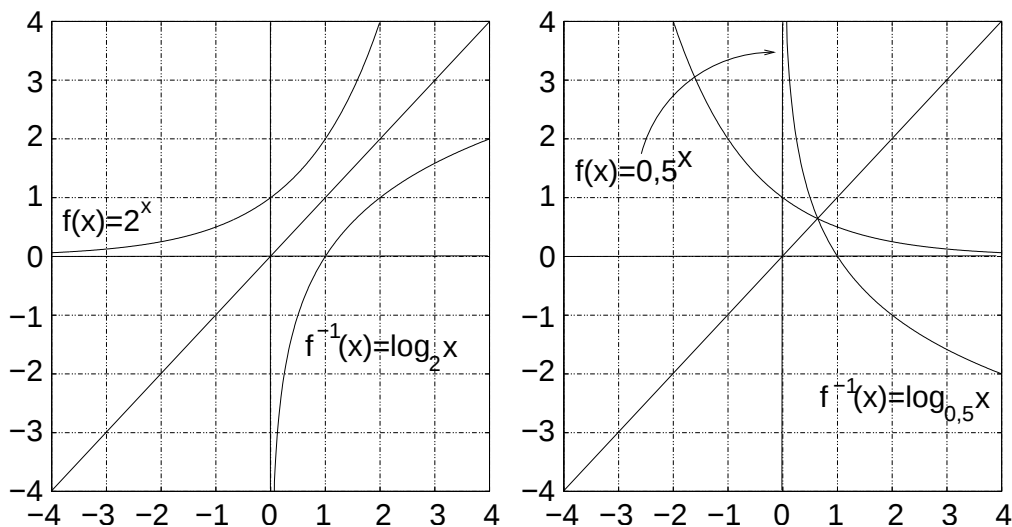
$$f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = \log_a x$$

Dess invers är exponentialfunktionen:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ : f^{-1}(x) = a^x.$$



Figur 4.15: Logaritmfunktionens graf $y = \log_e x$, där e är *Nepers tal*, se ”Olika logaritmsystem” längre fram. Vi ser att funktionen verkar vara strängt växande. Den går snabbt mot $-\infty$ då x närmar sig x -axeln och växer långsammare och långsammare för större x .



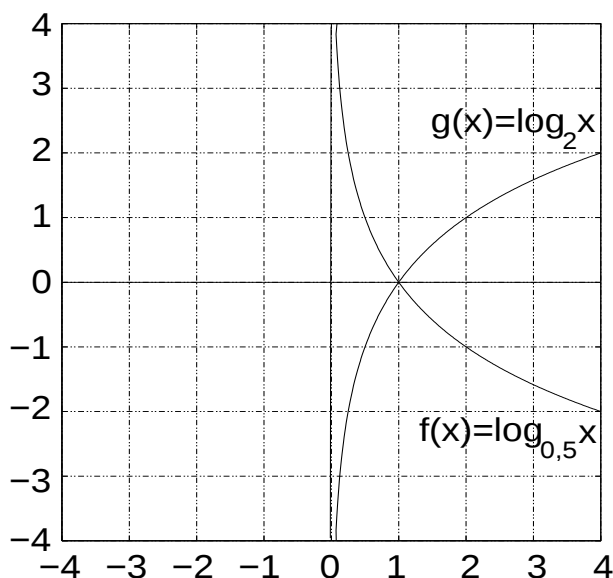
Figur 4.16: Till vänster, exponentialfunktionen 2^x och logaritmfunktionen $\log_2 x$ är varandras inverser. Till höger, $(1/2)^x$ och $\log_{1/2} x$ är varandras inverser. Notera symmetrin runt räta linjen $y = x$.

Egenskaper hos logaritmfunktionen:

Antag att $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}: f(x) = \log_a x$, där $a > 0$, $a \neq 1$. Då gäller:

1. $D_f = \mathbf{R}_+$ och $V_f = \mathbf{R}$.
2. f är strängt växande för $a > 1$ och strängt avtagande för $0 < a < 1$.
3. $f(1) = 0$. Grafen går alltså genom punkten $(1, 0)$.
4. Kurvorna $y = \log_a x$ och $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ är symmetriska m.a.p. x -axeln.

Anmärkning 4.45 Alla dessa egenskaper härleds ur det faktum, att logaritmfunktionen är exponentialfunktionens invers.



Figur 4.17: Logaritmfunktionen $g(x) = \log_a x$ och $f(x) = \log_{1/a} x$ är symmetriska m.a.p. x -axeln. Här är $a = 2$.

Exempel 4.46 Lös ekvationen

$$\log_2(x^2 - 1) = 3.$$

Lösning:

Vår ekvation är definierad då $x^2 - 1 > 0$, dvs $x < -1 \vee x > 1$. (Eftersom logaritmen bara tar positiva argument.) Med $D =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$ kan vi exponentiera båda leden.

$$\log_2(x^2 - 1) = 3 \iff x^2 - 1 = 2^3 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$$

Både $-3, 3 \in D$, så vi får $L = \{-3, 3\}$.

Exempel 4.47 Lös olikheten:

$$\log_{10}(x-1) < 1$$

Lösning:

Definitionsmängden är $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}$. Vi skall nu utnyttja egenskapen att logaritmfunktionen är exponentialfunktionens invers. Eftersom basen är 10, så är funktionen $x \rightarrow 10^x$ strängt växande. Vi exponentierar alltså (utan att vända olikhetstecknet).⁶

$$10^{\log_{10}(x-1)} < 10^1 \iff x-1 < 10 \iff x < 11$$

Eftersom $D =]1, \infty[$ erhålls:

$$L =]1, 11[.$$

Olika logaritmsystem

Beroende på vilken bas vi har säger vi att vi har olika *logaritmsystem*. De vanligaste logaritmsystemen är:

$$\log_e x = \ln x$$

och

$$\log_{10} x = \lg x.$$

Logaritmsystemet med basen e kallas den *naturliga logaritmen*. Det reella talet e kallas *Nepers tal* och är irrationellt med närmevärdet 2.71824.... Tio-logaritmen $\lg$ kallas *den Briggska logaritmen*. Vi kan byta logaritmsystem med hjälp av följande regel:

Sats 4.48 Antag att $a, b \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ och $x \in \mathbf{R}_+$. Då gäller att:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} &\iff \log_a x \cdot \log_b a = \log_b x \\ &\iff \log_b a^{\log_a x} = \log_b x \iff \text{sant} \end{aligned}$$

■

⁶Om vi skulle ha haft en sådan bas, att exponentialfunktionen vore strängt avtagande skulle vi, enligt definitionen på strängt avtagande funktion, ha vänt olikhetstecknet.

Exempel 4.49 Lös ekvationen:

$$\ln x = \lg x + 2$$

Lösning:

$D = \mathbf{R}_+$. Vi kan skriva om $\ln x$:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$$

Insättning i ekvationen ger:

$$\frac{\lg x}{\lg e} = \lg x + 2$$

Multiplicerar med $\lg e$.

$$\begin{aligned} \lg x = \lg x \lg e + 2 \lg e &\iff \lg x - \lg e \lg x = 2 \lg e \\ &\iff (1 - \lg e) \lg x = 2 \lg e \iff \lg x = \frac{2 \lg e}{1 - \lg e}, \end{aligned}$$

eftersom $\lg e \neq 1$.⁷ Enligt definitionen på logaritm gäller det alltså att (ty $\lg x = \log_{10} x$)

$$x = 10^{2 \lg e / (1 - \lg e)} \approx 34,3.$$

En metod som ofta är användbar i ekvations- och olikhetslösning är *logaritmering* av HL och VL.⁸ Detta kan man göra om båda sidorna är positiva. Man utnyttjar då egenskapen att logaritmen är strängt monoton. Vi skall belysa metoden med ett exempel:

Exempel 4.50 Lös ekvationen:

$$e^{2x} = 2$$

Lösning:

$D = \mathbf{R}$. Eftersom både VL och HL är strängt positiva (exponentialfunktionen tar bara strängt positiva värden), så kan vi logaritmera VL och HL, för att få

$$\ln e^{2x} = \ln 2$$

Eftersom $\log_a b^x = x \log_a b$ och $\ln e = 1$ fås:

$$2x = \ln 2 \iff x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

⁷ $\log_a b = 1 \iff b = a$.

⁸Vi har redan utnyttjat detta tankesätt, då vi tidigare exponentierade ekvationer. Vi vet att samma motiveringar helt allmänt kan användas då vi låter en strängt monoton funktion operera på båda leden. Vid olikhetslösning måste man dock hålla reda på typen av monotonitet, så att man vet hur olikhetstecknet vänds.