

# Propedeutisk matematik I

Daniel Djupsjöbacka  
Matematiska institutionen  
Åbo Akademi

(Bearbetat av Mikael Kurula)

11 november 2004

# Innehåll

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 0.1      | Minimalt förord . . . . .                               | 3         |
| <b>1</b> | <b>Introduktion</b>                                     | <b>4</b>  |
| 1.1      | Talområden . . . . .                                    | 4         |
| 1.2      | Matematiska symboler . . . . .                          | 5         |
| 1.3      | Räkneregler för reella tal . . . . .                    | 8         |
| 1.4      | Potenser . . . . .                                      | 10        |
| 1.5      | Polynom . . . . .                                       | 12        |
| 1.5.1    | Faktorisering . . . . .                                 | 15        |
| 1.6      | Rationella uttryck . . . . .                            | 16        |
| 1.7      | Intervall och olikhetstecken . . . . .                  | 18        |
| 1.8      | Linjer och parabler . . . . .                           | 18        |
| 1.8.1    | Linjer . . . . .                                        | 18        |
| 1.8.2    | Parabler . . . . .                                      | 20        |
| 1.9      | Kvadratroten . . . . .                                  | 22        |
| <b>2</b> | <b>Ekvationer och olikheter</b>                         | <b>25</b> |
| 2.1      | Ekvationer av första grad . . . . .                     | 25        |
| 2.1.1    | Förstgradsekvationer med (fria) parametrar . . . . .    | 28        |
| 2.2      | Ekvationssystem . . . . .                               | 29        |
| 2.3      | Olikheter av första grad . . . . .                      | 31        |
| 2.3.1    | Linjära olikheter med parametrar . . . . .              | 33        |
| 2.4      | Ekvationer av andra graden . . . . .                    | 34        |
| 2.4.1    | Kvadratkomplettering . . . . .                          | 35        |
| 2.4.2    | Andragradsekvationens allmänna lösningsformel . . . . . | 36        |
| 2.4.3    | Diskriminant . . . . .                                  | 39        |
| 2.4.4    | Polynoms delbarhet - faktorisering . . . . .            | 40        |
| 2.5      | Olikheter av andra graden . . . . .                     | 41        |
| 2.5.1    | Lösning med hjälp av diskriminanten . . . . .           | 41        |
| 2.5.2    | Lösning med hjälp av teckenschema . . . . .             | 44        |
| 2.5.3    | Andragradsolikheter med parametrar . . . . .            | 47        |
| 2.6      | Rationella olikheter . . . . .                          | 48        |
| 2.7      | Högregradsekvationer . . . . .                          | 50        |

|          |                                                              |            |
|----------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 2.8      | Ekvationer och olikheter med kvadratrötter och absolutbelopp | 53         |
| 2.8.1    | Ekvationer med kvadratrötter . . . . .                       | 54         |
| 2.8.2    | Olikheter med kvadratrötter . . . . .                        | 55         |
| 2.8.3    | Absolutbelopp . . . . .                                      | 56         |
| 2.8.4    | Ekvationer med absolutbelopp . . . . .                       | 60         |
| 2.8.5    | Olikheter med absolutbelopp . . . . .                        | 63         |
| <b>3</b> | <b>Analytisk geometri</b>                                    | <b>64</b>  |
| 3.1      | Linjens ekvation med riktningskoefficient . . . . .          | 64         |
| 3.1.1    | Parallella och ortogonala linjer . . . . .                   | 67         |
| 3.2      | Cirkelns ekvation . . . . .                                  | 68         |
| 3.3      | Ellipsens ekvation . . . . .                                 | 69         |
| <b>4</b> | <b>Funktioner</b>                                            | <b>71</b>  |
| 4.1      | Definitioner . . . . .                                       | 71         |
| 4.1.1    | Jämna och udda funktioner . . . . .                          | 76         |
| 4.2      | Sammansatta funktioner . . . . .                             | 77         |
| 4.3      | Växande och avtagande funktioner . . . . .                   | 80         |
| 4.4      | Bijektioner . . . . .                                        | 83         |
| 4.5      | Invers funktion . . . . .                                    | 85         |
| 4.6      | Några vanliga funktioner . . . . .                           | 90         |
| 4.6.1    | Det allmänna rotbegreppet . . . . .                          | 90         |
| 4.6.2    | Det allmänna potensbegreppet . . . . .                       | 92         |
| 4.6.3    | Exponentialfunktionen . . . . .                              | 93         |
| 4.6.4    | Logaritmfunktionen . . . . .                                 | 95         |
| <b>5</b> | <b>Geometri och Trigonometri</b>                             | <b>101</b> |
| 5.1      | Repetition . . . . .                                         | 101        |
| 5.2      | Vinklar och vinkelenheten radian . . . . .                   | 105        |
| 5.3      | Trigonometri - den rätvinkliga triangeln . . . . .           | 108        |
| 5.4      | Enhetscirkeln . . . . .                                      | 110        |
| 5.5      | Några rekursionsformler . . . . .                            | 113        |
| 5.6      | De trigonometriska funktionernas grafer . . . . .            | 115        |
| 5.7      | Trigonometriska formler . . . . .                            | 118        |
| 5.8      | Trigonometriska ekvationer . . . . .                         | 121        |
| 5.8.1    | Ekvationer av formen $f(x) = f(y)$ . . . . .                 | 121        |
| 5.8.2    | Arcusfunktionerna . . . . .                                  | 125        |
| <b>6</b> | <b>Gränsvärde</b>                                            | <b>131</b> |
| 6.1      | Definition av gränsvärde . . . . .                           | 131        |
| 6.2      | Räkneregler för gränsvärden . . . . .                        | 132        |
| 6.2.1    | Gränsvärden för trigonometriska funktioner . . . . .         | 136        |
| 6.3      | Ensidiga gränsvärden . . . . .                               | 138        |

|          |                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.4      | Oegentliga gränsvärden . . . . .                                       | 141        |
| 6.5      | Gränsvärden då $x$ går mot $\pm\infty$ . . . . .                       | 145        |
| <b>7</b> | <b>Kontinuitet</b> . . . . .                                           | <b>149</b> |
| 7.1      | Definitioner . . . . .                                                 | 149        |
| 7.2      | Satser om kontinuitet . . . . .                                        | 153        |
| 7.3      | Kontinuerlig funktion i ett slutet intervall . . . . .                 | 159        |
| <b>8</b> | <b>Derivata</b> . . . . .                                              | <b>161</b> |
| 8.1      | Inledning till derivata . . . . .                                      | 161        |
| 8.2      | Derivatafunktionen . . . . .                                           | 164        |
| 8.3      | Deriveringsregler . . . . .                                            | 165        |
| 8.4      | En kurvas tangent och normal . . . . .                                 | 167        |
| 8.5      | Ensidiga derivator . . . . .                                           | 173        |
| 8.6      | Derivatan av en produkt och en kvot . . . . .                          | 177        |
| 8.7      | Högre derivator . . . . .                                              | 179        |
| 8.8      | Deriveringsregler för vissa<br>vanliga funktioner . . . . .            | 180        |
| 8.9      | Derivatan av en sammansatt funktion . . . . .                          | 182        |
| 8.10     | En tillämpning: L'Hôpitals regel . . . . .                             | 184        |
| 8.11     | En funktions extremvärden . . . . .                                    | 186        |
| 8.11.1   | Sambandet mellan funktionsförloppet och derivatans<br>tecken . . . . . | 186        |
| 8.11.2   | Lokala extremvärden . . . . .                                          | 189        |
| 8.11.3   | Globala maximi- och minimivärden . . . . .                             | 196        |
| 8.11.4   | Extremvärdesproblem . . . . .                                          | 199        |

## 0.1 Minimalt förord

Detta kompendium har väsentligen skrivits av Daniel, men jag har gjort en hel del korrigeringar, tillägg och andra ändringar då jag höll kursen år 2002. En del av materialet är onödigt ingående och det kan väl anses vara föreläsarens sak att avgöra vad som är intressant och vad som inte är det. Korrigeringsförslag tas tacksamt emot på adressen *mkurula@abo.fi*.

Åbo, den 25 mars 2004, Mikael