4. Allmänna existens- och entydighetssatser.

Vi formulerade (utan bevis) i Sats 8, sida 40, tillräckliga villkor för att begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = b,$$

skall ha en lösning som är entydigt bestämd på något öppet intervall I som innehåller punkten $x = a$.

Ett begynnelsevärdesproblem för ett system av DE:er av första ordningen underlyder en motsvarande existens- och entydighetssats. Då varje begynnelsevärdesproblem för en DE av n:te ordning kan överföras på ~~ett~~ dylikt system, så behandlar vi först allmänt såna system, varvid det är brukligt att låta t vara oberoende variabel och $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de obekanta funktionerna.

Definition 88. Ett system av n stycken DE:er av första ordningen i normalform kan skrivas

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (111)$$

där $f_1, \dots, f_n$ är givna funktioner. En lösning till systemet består av n funktioner

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

som satisfierar alla ekvationer i (111).

Genom att införa vektorvärda funktioner $\bar{x}(t)$ och $\bar{f}(t,\bar{x})$ definierade av

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{f}(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\bar{x}) \end{pmatrix} \qquad (112)$$

så kan systemet (111) skrivas i formen

$$\bar{x}' = \bar{f}(t,\bar{x}). \qquad (113)$$

Exempel 89. a) En DE av n:te ordningen skriven på normalform

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \qquad (114)$$

kan, om vi sätter $x_1 = x$, $x_2 = x'$, …, $x_n = x^{(n-1)}$, skrivas som ett system av DE:er av första ordning,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \qquad (115)$$

För varje lösning $x(t)$ till (114) är n-tipeln $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ en lösning till (115). Omvänt, är för varje n-tipel $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ som löser (115) $x_1(t)$ en lösning till (114).

b) Ekvationen $t^2 x'' - 3t x' + 4x = t^3$, $t > 0$, kan skrivas

$$x'' = \frac{3}{t} x' - \frac{4}{t^2} x + t.$$

Sätter vi $x_1 = x$, $x_2 = x'$ erhålls det ekvivalenta systemet

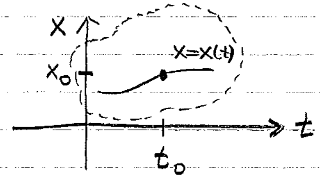
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{4}{t^2} \cdot x_1 + \frac{3}{t} \cdot x_2 + t \quad (= f(t, x_1, x_2)) \end{cases}$$

4.1 Lipschitzvillkor

Betrakta ett system av första ordningen med n ekvationer och ett begynnelsevillkor,

$$\bar{x}' = \bar{f}(t,\bar{x}), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0.$$

Här är $\bar{f}(t,\bar{x})$ en kontinuerlig funktion från någon öppen sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$, och $(t_0,\bar{x}_0)\in\Omega$. Att detta begynnelsevärdesproblem har en entydig lösning betyder geometriskt att genom $(t_0,\bar{x}_0)$ går precis en lösningskurva $\bar{x} = \bar{x}(t)$.



$(n=1)$

Vi har i fallet $n=1$ visat att begynnelsevärdesproblemet kan ha flera (oändligt många) lösningar, se Exempel 7, sida 10.

Vi skall införa ett enkelt villkor på $\bar{f}$ som garanterar entydighet.

Definition 90. Funktionen $\bar{f}(t,\bar{x})$ säges uppfylla ett (globalt) Lipschitzvillkor i $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ om det finns en konstant L sådan att

$$|\bar{f}(t,\bar{x})-\bar{f}(t,\bar{y})| \le L|\bar{x}-\bar{y}| \qquad (116)$$

för varje $(t,\bar{x})$ och $(t,\bar{y})$ i Ω. Funktionen $\bar{f}(t,\bar{x})$ uppfyller ett lokalt Lipschitzvillkor i Ω om varje punkt i Ω har en omgivning där ett Lipschitzvillkor (116) gäller för någon konstant L.

Anmärkning. Ett globalt Lipschitzvillkor utgör ett stängare krav på $\bar{f}$, ty samma konstant L skall duga i hela Ω.

Anmärkning 2. I $\mathbb{R}^n$ används det vanliga euklidiska avståndet mellan två punkter $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ och $\bar{y}=(y_1,\dots,y_n)$, nämligen $|x-y| = ((x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2)^{1/2}$.

Exempel 91. $(n=1)$ Funktionen $f(t,x)=t^2x^2$ uppfyller ett Lipschitzvillkor i $\Omega=\{(t,x): |t|<1, |x|<1\}$ med $L=2$, ty

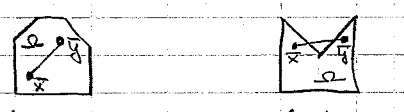
$$|f(t,x)-f(t,y)| = |t^2(x^2-y^2)| \le |(x+y)(x-y)| \le (|x|+|y|)|x-y| \le 2|x-y|.$$

Exempel 92. $(n=1)$ Betrakta åter begynnelsevärdesproblemet i Ex. 7 med oändligt många lösningar:

$$x' = 2\sqrt{|x|}, \quad x(1)=0.$$

Då är $f(t,x)=2\sqrt{|x|}$ kontinuerlig i varje omgivning av $(1,0)$. Men $f(t,x)$ satisfierar inget Lipschitzvillkor i en omgivning av $(1,0)$. (kolla)

En delmängd Ω av $\mathbb{R}^n$ är konvex om för varje par $\bar{x},\bar{y}\in\Omega$ gäller att hela sträckan mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ ligger i Ω.



Konvex Ej konvex

Lemma 93. Antag att $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ är konvex och begränsad samt att funktionen $\bar{f}(t,\bar{x})$ och dess partiella derivator $\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_n}$ är kontinuerliga på det slutna höljet $\bar{\Omega}$ av Ω. Då uppfyller $\bar{f}(t,\bar{x})$ ett (globalt) Lipschitzvillkor i Ω.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

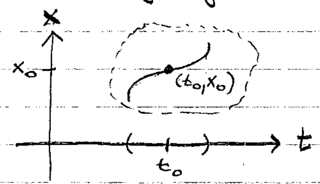
4.2 Existens och entydighet

Vi formulerar existens- och entydighetssatsen i två versioner, en lokal och en global. Vi nöjer oss med att bevisa den globala satsen för fallet $n = 1$.

Sats 94. (Lokala existens- och entydighetssatsen). Antag att $\bar{f}(t,\bar{x})$ är en kontinuerlig funktion i en omgivning av $(t_0,\bar{x}_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ och uppfyller ett lokalt Lipschitzvillkor där. Då finns ett öppet intervall kring t_0 i vilket begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{x}'(t) = \bar{f}(t,\bar{x}(t)), \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \tag{117}$$

har en entydig lösning.

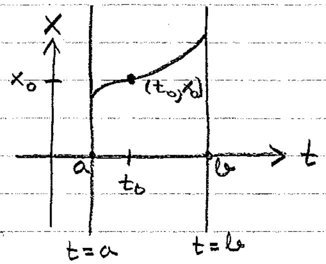


$(n=1)$

Sats 95. (Globala existens- och entydighetssatsen). Antag att funktionen $\bar{f}(t,\bar{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett (globalt) Lipschitzvillkor i området $\Omega = [a,b]\times\mathbb{R}^n$. Då har begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{x}'(t) = \bar{f}(t,\bar{x}(t)), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t_0 \in [a,b] \tag{118}$$

en entydig lösning $\bar{x}(t)$ för $t \in [a,b]$.



$(n=1)$

Bevis för Sats 95. $(n=1)$. Vi omskriver problemet (118) som en integralekvation:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds. \tag{119}$$

Existensen av lösning. Med hjälp av (119) konstruerar vi en iterationsformel som ger allt bättre approximativa lösningar. Detta är Picard's iterationsförfarande:

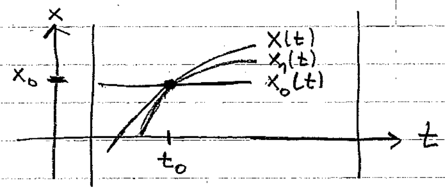
Sätt $I = [a,b]$ och definiera operatorn $T: C(I) \to C(I)$ genom

$$T(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\cdot ds.$$

Låt nu $x_0(t) \equiv x_0$ vara den första approximativa lösningen (dålig). Sätt sedan:

$$x_{n+1}(t) = T(x_n(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))\,ds, \quad n = 0,1,\ldots$$

(Ovanstående rekursionsformel kan uppskrivas utan att anta att någon lösning existerar).



Övning: Tillämpa iterationsförfarandet på problemet

$$x' = x, \qquad x(0) = 1,$$

och jämför med den exakta lösningen $x(t) = e^t$.

Då nu $f(t,x_0)$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade (kompakta) intervallet $I=[a,b]$, så existerar $M>0$ så att

$$|f(t,x_0)| \leq M \quad \text{för alla } t\in I.$$

Då är

$$|x_1(t)-x_0(t)| = \left|x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,ds - x_0\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|f(s,x_0)|\,ds\right| \leq M\cdot|t-t_0|.$$

Med induktion visas nu formeln

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leq M\cdot L^n\cdot\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0,1,\ldots \qquad (120)$$

Antag att (120) gäller för något $n\geq 0$. Då är

$$|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|f(s,x_{n+1}(s))-f(s,x_n(s))|\,ds\right|$$

$$\leq L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}|x_{n+1}(s)-x_n(s)|\,ds\right|, \ \forall s\in I \quad \text{(Lipschitzvillkoret)}$$

$$\leq L\cdot M\cdot\frac{L^n}{(n+1)!}\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{n+1}ds\right| \quad \text{(Induktionsantagandet)}$$

$$= M\cdot\frac{L^{n+1}}{(n+2)!}\cdot|t-t_0|^{n+2}.$$

Induktion ger då att (120) gäller för $n=0,1,\ldots$.

Betrakta funktionsföljden $(x_n(t))_{n=0}^{\infty}$ i $C(I)$. Nu gäller att

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \sum_{n=0}^{m}(x_{n+1}(t)-x_n(t)) \qquad (121)$$

Konvergerar likformigt i I mot $x(t)\in C(I)$ om och endast om funktionsserien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t)-x_n(t)) \qquad (122)$$

Konvergerar likformigt i I.

Med stöd av (120) erhålls för varje $t\in I$ att

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leq \frac{M}{L}\cdot\frac{(L(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{L}\cdot\frac{(L(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L}\cdot\left(e^{L(b-a)}-1\right).$$

Då ger Weierstrass M-test (se analysboken) att funktionsserien (122) konvergerar likformigt i $I=[a,b]$. Därmed konvergerar funktionsföljden $(x_n(t))_{n=0}^{\infty}$ likformigt i I mot $x(t)\in C(I)$. Alltså gäller för varje $n=0,1,2,\ldots$ att

$$\sup_{t\in I}|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))| \leq L\cdot\sup_{t\in I}|x_n(t)-x(t)|$$

$$\to 0, \text{ då } n\to\infty.$$

Alltså $f(t,x_n(t))$ konvergerar likformigt mot $f(t,x(t))$ i I. Då erhålls:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))\,ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t}\lim_{n\to\infty} f(s,x_n(s))\,ds \quad \text{(likformig konvergens)}$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds.$$

Därmed löser $x(t)$ begynnelsevärdesproblemet (118).

Entydigheten av lösningen. Betrakta igen integralekvationen (119) och antag att vi har två lösningar $x(t)$ och $y(t)$. Antag att $t>t_0$. Då är

$$|y(t)-x(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}(f(s,y(s))-f(s,x(s)))\,ds\right|$$

$$\leq L\int_{t_0}^{t}|y(s)-x(s)|\,ds, \qquad (123)$$

p.g.a. Lipschitzvillkoret.

Sätt nu för $t \in I$, $t \geq t_0$

$$w(t) = L \cdot \int_{t_0}^{t} |y(s) - x(s)|\, ds.$$

Då är

$$w'(t) = L\,|y(t) - x(t)|, \quad t \geq t_0$$
$$w(t) \geq |y(t) - x(t)|, \quad t \geq t_0,$$

med stöd av (123). Alltså är

$$w'(t) \leq L \cdot w(t), \quad t \geq t_0.$$

Multiplikation med e^{-Lt} ger:

$$w'(t)\, e^{-Lt} - L\, e^{-Lt} \cdot w(t) \leq 0, \quad t \geq t_0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\left(w(t)\, e^{-Lt}\right) \leq 0, \quad t \geq t_0.$$

Därmed är $w(t)\, e^{-Lt}$ avtagande för $t \geq t_0$:

$$0 \leq e^{-Lt} \cdot w(t) \leq e^{-Lt_0} \cdot w(t_0) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Därmed är $w(t) = 0$, $t \geq t_0$, och då

$$0 \leq |y(t) - x(t)| \leq w(t), \quad t \geq t_0$$

erhålls att $y(t) = x(t)$ för $t \geq t_0$.

Fallet $t < t_0$ behandlas analogt. Därmed är lösningens entydighet ådagalagd och sats 95 är bevisad. □

Sats 95 kan utvidgas att gälla för öppna, halvöppna samt obegränsade intervall. Vi ger korollariet utan bevis:

Korollarium 96. Låt t_0 beteckna en punkt i ett godtyckligt intervall I. Antag att funktionen $\bar{f}(t, \bar{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ för varje begränsat delintervall $[a, b]$ av I. Då har begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

där $t_0 \in I$, en entydig lösning i I.

Den lokala existens- och entydighetssatsen säger att en entydig lösning existerar lokalt, men ingenting om hur långt den i ett givet fall kan utsträckas.

Definition 97. Antag att I är ett öppet intervall. En lösning $\bar{x}(t)$ i I till ett system av DE:er (eller till en DE) är maximal om den inte är restriktionen av någon lösning i något större intervall J innehållande I, dvs. om den inte kan fortsättas som lösning utanför I.

Exempel 98. $(n = 1)$ Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1. \tag{124}$$

Betrakta den öppna omgivningen $\{(t, x) : |t| < \frac{1}{2}, |x| < \frac{3}{2}\}$ av punkten $(0, 1)$. Där är $f(t, x) = x^2$ kontinuerlig och uppfyller där ett lokalt Lipschitzvillkor med $L = 3$, ty för (t, x), (t, y) i omgivningen gäller:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y|$$
$$\leq 3 \cdot |x - y|$$

Då är förutsättningarna i Sats 94 uppfyllda och lösningen till (124) existerar och är entydigt bestämd i ett intervall I med $t_0 = 0 \in I$.

Genom insättning i (124) ser vi att lösningen ges av

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Nu är $x(t)$ väldefinierad i $(-\infty, 1)$, så den maximala lösningen till problemet (124) ges då av

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Följande resultat ges utan bevis:

Sats 99. (Peanos existenssats). Om funktionen $\bar{f}(t,\bar{x})$ är kontinuerlig i en omgivning av en punkt $(t_0, \bar{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, så har begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{x}' = \bar{f}(t,\bar{x}), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

en lösning $\bar{x}(t)$ som är kontinuerligt deriverbar för t i något intervall I med $t_0 \in I$.

Anmärkning. Enligt Sats 99 är det kontinuiteten hos $\bar{F}(t,\bar{x})$ som garanterar existensen av en lösning, medan Lipschitzvillkoret (Satserna 94, 95) garanterar entydigheten.

I vissa fall kan en lösning vara entydig även om inget Lipschitzvillkor gäller, och en lösning kan existera och vara entydig till och med om $\bar{F}(t,\bar{x})$ är diskontinuerlig.

4.3 Ekvationer av högre ordning

Vi såg redan i Ex. 89 a) att en DE av n:te ordningen

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

har en ekvivalent formulering som ett system av n stycken DE:er av första ordningen:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{125}$$

där $x_1 = x$, $x_2 = x_1'$, ..., $x_n = x_{n-1}'$. Därmed genererar Sats 94 och korollarium 96 följande existens- och entydighetssats för en DE av n:te ordning:

Sats 100. Låt I vara ett intervall med $t_0 \in I$. Om funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbb{R}^n$ för varje slutet begränsat delintervall I_1 av I (resp. uppfyller ett Lipschitzvillkor i en omgivning av $(t_0, \bar{x}_0)$), så har begynnelsevärdesproblemet

$$x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}), \quad x(t_0) = x_{01}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$$

en entydig lösning i I (resp. i en omgivning av t_0). ($\bar{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^T$ och $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$).

Bevis: Högra ledet i (125), $\bar{F}(t,\bar{x}) = (x_2, x_3, \dots, f(t,\bar{x}))^T \in \mathbb{R}^n$, uppfyller ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbb{R}^n$ (resp. i en omgivning av $(t_0, \bar{x}_0)$), ty om $|f(t,\bar{x}) - f(t,\bar{y})| \le L_1 |\bar{x} - \bar{y}|$ gäller:

$$|\bar{F}(t,\bar{x}) - \bar{F}(t,\bar{y})| \le \underbrace{|x_2 - y_2|}_{\le |\bar{x}-\bar{y}|} + \dots + \underbrace{|x_n - y_n|}_{\le |\bar{x}-\bar{y}|} + |f(t,\bar{x}) - f(t,\bar{y})|$$
$$\le (n-1)|\bar{x}-\bar{y}| + L_1|\bar{x}-\bar{y}| = \underbrace{((n-1)+L_1)}_{L} \cdot |\bar{x}-\bar{y}|$$

och koroll. 96 (resp. Sats 94) ger att satsens påstående gäller. □

5. System av linjära differentialekvationer

Betrakta följande system av 3 linjära DE:er av 1:a ordningen:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + t^2 x_2 + 3t \\ x_2' = (\sin t)\,x_2 + (\cos t)\,x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

Detta system kan skrivas i matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & t^2 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Definition 101. Ett linjärt system av DE:er är på normalform om det skrivs i formen

$$\bar{x}'(t) = \bar{A}(t)\cdot\bar{x}(t) + \bar{b}(t), \tag{126}$$

där

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \tag{127}$$

Vi antar att $\bar{A}(t)$ och $\bar{b}(t)$ är kontinuerliga funktioner på något intervall I, vilket innebär att matris- och vektorelementen är kontinuerliga funktioner i I.

Systemet är homogent om $\bar{b}(t) \equiv \bar{0}$ i I och inhomogent om $\bar{b}(t) \not\equiv \bar{0}$ i I.

I ett begynnelsevärdesproblem för (126) bör man hitta en deriverbar vektorfunktion $\bar{x}(t)$ som satisfierar (126) för $t \in I$ och som uppfyller begynnelsevillkoret $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, där $t_0 \in I$ och $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$ är en given kolonnvektor.

Exempel 102. Varje linjär DE av n:te ordningen,

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\cdot x(t) = g(t)$$

är ekvivalent med ett system av form (126) om vi sätter: $x_1(t) := x(t)$, $x_2(t) := x'(t), \dots, x_n(t) := x^{(n-1)}(t)$. Då är $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $\bar{b}(t) = (0, \dots, 0, g(t))^T$ och

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Exempel 103. Små system kan ibland lösas med elementära metoder. Betrakta det homogena systemet:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}.$$

Då gäller: $x_1'' = 3x_1' - 2x_2' = 3(3x_1 - 2x_2) - 2(2x_1 - 2x_2) = 5x_1 - 2x_2$. Således är: $x_1'' - x_1' = 2x_1$, alltså

$$x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0. \tag{128}$$

$L(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$. Därmed har vi den allmänna lösningen $x_1(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ till (128). Ur den första ekvationen erhålls att $x_2(t) = \frac{1}{2}(3x_1 - x_1') = \frac{1}{2}(3c_1e^{2t} + 3c_2e^{-t} - 2c_1e^{2t} + c_2e^{-t}) = \frac{1}{2}c_1e^{2t} + 2c_2e^{-t}$. Varje lösning till systemet är av formen

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ \frac{1}{2}c_1e^{2t} + 2c_2e^{-t} \end{bmatrix} = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{129}$$

Omvänt ser man genom insättning att varje funktion $(x_1(t), x_2(t))^T$ av ovanstående form är en lösning till systemet. Den allmänna lösningen (129) innehåller tydligen två godtyckliga konstanter.

5.1 Existens och entydighet

Vi tillämpar koroll. 96 för att påvisa existensen och entydigheten för en global lösning till ett begynnelsevärdesproblem:

Sats 104. Antag att $\overline{A}(t)$ och $\overline{b}(t)$ i ekvation (126) är kontinuerliga funktioner av t i något intervall I. Antag att $(t_0, \overline{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Då existerar en entydigt bestämd global lösning $\overline{x}(t)$ för $t \in I$ som löser begynnelsevärdesproblemet:

$$\overline{x}'(t) = \overline{A}(t)\cdot\overline{x}(t) + \overline{b}(t), \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{130}$$

Bevis. Beteckna $\overline{f}(t,\overline{x}) = \overline{A}(t)\cdot\overline{x} + \overline{b}(t)$. Låt $[a,b]$ vara ett godtyckligt slutet och begränsat delintervall av I. Låt

$$S := \{\overline{z} \in \mathbb{R}^n : |\overline{z}| = 1\}$$

beteckna mängden av enhetsvektorer i $\mathbb{R}^n$. Då är $[a,b]\times S$ en sluten och begränsad mängd, (kompakt), och därmed antar den på $[a,b]\times S$ kontinuerliga funktionen $|\overline{A}(t)\cdot\overline{x}|$ ett maximum på mängden (sats i FDA). Sätt

$$L := \max_{(t,\overline{z})\in[a,b]\times S} |\overline{A}(t)\cdot\overline{z}|.$$

För $(t,\overline{x}), (t,\overline{y}) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{y}$, gäller då

$$\begin{aligned} |\overline{f}(t,\overline{x}) - \overline{f}(t,\overline{y})| &= |\overline{A}(t)\overline{x} + \overline{b}(t) - (\overline{A}(t)\overline{y} + \overline{b}(t))| \\ &= |\overline{A}(t)(\overline{x}-\overline{y})| \\ &= \left|\overline{A}(t)\frac{(\overline{x}-\overline{y})}{|\overline{x}-\overline{y}|}\right| \cdot |\overline{x}-\overline{y}| \\ &\leq L\cdot|\overline{x}-\overline{y}|, \end{aligned}$$

ty $\frac{(\overline{x}-\overline{y})}{|\overline{x}-\overline{y}|} \in S$. Därmed uppfylls ett Lipschitzvillkor i $[a,b]\times\mathbb{R}^n$, och satsens påstående följer ur Korollarium 96. □

5.2 Homogena system

Vi låter nu $\overline{b}(t) \equiv \overline{0}$ i (126) och betraktar det homogena systemet

$$\overline{x}' = \overline{A}(t)\cdot\overline{x}. \tag{131}$$

Definition 105. Mängden V av alla vektorvärda funktioner $\overline{x}(t)$ som löser (131) på ett intervall I kallas lösningsrummet till (131).

Anmärkning. Mängden av kontinuerliga vektorvärda funktioner $\overline{f}: I \to \mathbb{R}^n$ bildar ett vektorrum. Om $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ gäller för alla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ att:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2) &= c_1\overline{x}_1' + c_2\overline{x}_2' = c_1\overline{A}(t)\overline{x}_1 + c_2\overline{A}(t)\overline{x}_2 \\ &= \overline{A}(t)(c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2), \end{aligned}$$

alltså $c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 \in V$ och därmed är V ett underrum av vektorrummet. Då är V ett vektorrum.

Definition 106. Vektorerna $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, är linjärt beroende om det finns konstanter $c_1, \dots, c_m$ som inte alla är 0, så att

$$c_1\cdot\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m = \overline{0}. \tag{132}$$

Om (132) gäller endast för $c_1 = \dots = c_m = 0$ är vektorerna linjärt oberoende.

Vektorfunktionerna $\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_m(t)$ är linjärt beroende på intervallet I om det finns konstanter $c_1, \dots, c_m$ som inte alla är 0, så att

$$c_1\overline{x}_1(t) + \dots + c_m\cdot\overline{x}_m(t) = \overline{0}, \tag{133}$$

för alla $t \in I$. Linjärt oberoende om (133) gäller $\forall t \in I$ endast då $c_1 = 0,$

Anmärkning. För vektorfunktionerna $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k \in \overline{V}$ kan man tala om att de är linjärt oberoende i $\overline{V}$, och för givet $t_0 \in I$ kan man tala om att $\overline{x}_1(t_0), \dots, \overline{x}_k(t_0)$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$. Sambandet mellan dessa frågor ges i följande Lemma.

Lemma 107. Låt $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$ vara lösningar till det homogena systemet (131). Då är följande påståenden ekvivalenta:

a) $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$ är linjärt oberoende i $\overline{V}$,

b) $\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_k(t)$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$ för alla $t \in I$,

c) $\overline{x}_1(t_0), \dots, \overline{x}_k(t_0)$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$ för något $t_0 \in I$.

Bevis: (Visar att a) => b) => c) => a)).

a) => b): Antag att a) gäller. Antites: Antag att det finns något t_0 sådant att $\overline{x}_1(t_0), \dots, \overline{x}_k(t_0)$ är linjärt beroende.

Då finns tal c_j som inte alla är noll, så att

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \overline{x}_j(t_0) = \overline{0}.$$

Betrakta funktionerna $\overline{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \overline{x}_j(t)$ och $\overline{x}(t) \equiv \overline{0}$. Båda löser begynnelsvärdesproblemet:

$$\overline{x}' = \overline{A}(t) \cdot \overline{x}, \quad \overline{x}(t_0) = \overline{0}$$

och de är därmed lika p.g.a. entydigheten (Sats 104). Alltså är $\sum_{j=1}^{k} c_j \overline{x}_j(t) = \overline{0}$ för alla $t \in I$, dvs. $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$ är linjärt beroende, en motsägelse. Antitesen är falsk och a) => b).

b) => c): Trivialt.

c) => a): Antag att c) gäller. Om nu $\sum_{j=1}^{k} c_j \overline{x}_j(t) = \overline{0}$ för alla $t \in I$, så kan vi välja $t = t_0$. Då erhålls att $\sum_{j=1}^{k} c_j \overline{x}_j(t_0) = \overline{0}$, och därmed att $c_1 = \dots = c_k = 0$.

Alltså är $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$ linjärt oberoende i $\overline{V}$ och c) => a). □

Sats 108. Låt $n \times n$ matrisen $\overline{A}(t)$ vara en kontinuerlig funktion av t på intervallet I. Då bildar lösningarna till det homogena systemet

$$\overline{x}' = \overline{A}(t) \cdot \overline{x} \tag{134}$$

ett vektorrum $\overline{V}$ vars dimension är n, $\dim \overline{V} = n$.

Bevis: 1] Antag att $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k \in \overline{V}$ är linjärt oberoende och att $k > n$. Då ger Lemma 107 c) att $\overline{x}_1(t_0), \dots, \overline{x}_k(t_0)$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$ för något $t_0 \in I$. Men då $\dim \mathbb{R}^n = n < k$ ger detta en motsägelse. Alltså gäller $\dim \overline{V} \leq n$. ($k \leq n$)

2] Fixera $t_0 \in I$. Låt $\overline{x}_{01}, \dots, \overline{x}_{0n}$ vara linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$. Med stöd av Sats 104 finns det för varje j; $j = 1, \dots, n$; en entydig lösning $\overline{x}_j(t) \in \overline{V}$ till de n begynnelsevärdesproblemen:

$$\overline{x}' = \overline{A}(t) \cdot \overline{x}, \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_{0j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Då är $\overline{x}_1(t_0), \dots, \overline{x}_n(t_0)$ linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$, och med stöd av Lemma 107 är då funktionerna $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in \overline{V}$ linjärt oberoende i $\overline{V}$. Därmed är $\dim \overline{V} \geq n$.

Med stöd av 1] och 2] erhålls att $\dim \overline{V} = n$. □

Korollarium 109. Lösningsmängden $\overline{V}$ till en linjär homogen DE av n:te ordningen med kontinuerliga koefficienter i ett intervall I,

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0 \qquad (135)$$

är ett n-dimensionellt vektorrum. ($\dim \overline{V} = n$).

Bevis: Skriv om (135) som ett linjärt system av första ordningen enligt Exempel 102, och påståendet ges därefter av Sats 108. □

Definition 110. Vektorerna $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in \overline{V}$ utgör en bas för vektorrummet $\overline{V}$ om de är linjärt oberoende i $\overline{V}$ och om varje vektor $\overline{x} \in \overline{V}$ kan framställas som en linjärkombination

$$\overline{x} = c_1 \overline{x}_1 + \dots + c_n \overline{x}_n,$$

där $c_1, \dots, c_n$ är konstanter. (Härvidlag är $\dim \overline{V} = n$).

Betrakta en bas $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ i lösningsrummet $\overline{V}$ till systemet

$$\overline{x}' = \overline{A}(t) \cdot \overline{x}. \qquad (136)$$

Inför kolonnmatriserna

$$\overline{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, \overline{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}. \qquad (137)$$

Definition 111. Matrisen

$$\overline{F}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad (138)$$

med en bas $\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_n(t)$ i $\overline{V}$ som kolonner kallas en Fundamentalmatris till systemet (136). Determinanten för en fundamentalmatris $\overline{F}(t)$,

$$\det \overline{F}(t) \qquad (139)$$

kallas Wronski-determinanten.

Då varje lösning i lösningsrummet $\overline{V}$ till systemet (136) kan skrivas som en linjärkombination av en given bas erhålls:

Sats 112. Om $\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_n(t)$ är en bas i lösningsrummet $\overline{V}$ till systemet

$$\overline{x}' = \overline{A}(t)\,\overline{x}$$

och $\overline{F}(t)$ är motsvarande fundamentalmatris, så ges den allmänna lösningen till det homogena systemet av

$$\overline{x}(t) = \overline{F}(t) \cdot \overline{c} \quad (= c_1 \overline{x}_1(t) + \dots + c_n \overline{x}_n(t)) \qquad (140)$$

där $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ är en godtycklig vektor.

Eftersom kolonnerna $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ i en $n \times n$ matris $\bar{A}$ bildar en bas i $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\bar{A}$ är icke-singulär (inverterbar), vilket gäller om och endast om $\det \bar{A} \neq 0$, så erhålls med stöd av Lemma 107 följande karakterisering av fundamentalmatriser till ett system:

Sats 113. För funktionerna $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ i lösningsrummet V till det homogena systemet

$$\bar{x}' = \bar{A}(t) \cdot \bar{x}(t)$$

är följande påståenden ekvivalenta:

a) Matrisen $\bar{F}(t) = (\bar{x}_1(t) \ \dots \ \bar{x}_n(t))$ är en fundamentalmatris till systemet,

b) $\det \bar{F}(t) \neq 0$ för varje $t \in I$,

c) $\det \bar{F}(t) \neq 0$ för något $t_0 \in I$.

Exempel 114. Det homogena systemet ($I = (-\infty, \infty)$)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(jfr. Ex. 103)}$$

Satisfieras av $\bar{x}(t) = (e^{2t}, \frac{1}{2} e^{2t})^T$ och $\bar{y}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})^T$.

Bildar:

$$\bar{F}(t) = (\bar{x}(t) \ \ \bar{y}(t)) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2} e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Då är

$$\det \bar{F}(t) = e^{2t} \cdot 2e^{-t} - \tfrac{1}{2} e^{2t} \cdot e^{-t} = \tfrac{3}{2} e^{t} \neq 0 \ \forall t.$$

Därmed är $\bar{F}(t)$ en fundamentalmatris och den allmänna lösningen ges av:

$$\bar{x}(t) = \bar{F}(t) \cdot \bar{c} = c_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5.3 Inhomogena system

Med hjälp av fundamentalmatrisen kan vi bestämma en partikulär lösning till det inhomogena systemet

$$\bar{x}' = \bar{A}(t) \cdot \bar{x} + \bar{b}(t). \qquad (141)$$

Sats 115. Antag att $\bar{A}(t)$ och $\bar{b}(t)$ är kontinuerliga på intervallet I. Låt $\bar{F}(t)$ vara en fundamentalmatris till det homogena systemet $\bar{x}' = \bar{A}(t) \cdot \bar{x}$. Då är

$$\bar{x}(t) = \bar{F}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \bar{F}(s)^{-1} \cdot \bar{b}(s)\, ds \qquad (142)$$

den lösning till det inhomogena systemet (141) som uppfyller $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$.

Bevis: Låt $\bar{g}(t)$ beteckna integralen i (142). Nu gäller:

$$\bar{F}'(t) = (\bar{x}_1'(t) \ \dots \ \bar{x}_n'(t)) = (\bar{A}(t)\,\bar{x}_1(t) \ \dots \ \bar{A}(t)\,\bar{x}_n(t))$$

$$= \bar{A}(t)\,(\bar{x}_1(t) \ \dots \ \bar{x}_n(t)) = \bar{A}(t) \cdot \bar{F}(t).$$

och vidare är $\bar{x}(t) = \bar{F}(t) \cdot \bar{g}(t)$. Alltså erhålls

$$\bar{x}'(t) = \bar{F}'(t) \cdot \bar{g}(t) + \bar{F}(t) \cdot \bar{g}'(t)$$

$$= \bar{A}(t) \cdot \bar{F}(t)\,\bar{g}(t) + \bar{F}(t) \cdot \bar{F}(t)^{-1} \cdot \bar{b}(t)$$

$$= \bar{A}(t) \cdot \bar{x}(t) + \bar{b}(t).$$

Därmed är (142) en lösning till (141) och $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$. $\square$

Sats 116. Antag att $\overline{x}_1(t)$ är en partikulär lösning till det inhomogena systemet (141) på intervallet I. Låt $\overline{x}_h(t)$ beteckna den allmänna lösningen till motsvarande homogena system. ($\overline{x}_h(t)=\overline{F}(t)\,\overline{c}$). Då ges den allmänna lösningen till det inhomogena systemet (141) av

$$\overline{x}(t) = \overline{x}_1(t) + \overline{x}_h(t). \qquad (143)$$

Bevis: Låt $\overline{y}(t)$ vara en godtyckligt vald lösning på intervallet I till det inhomogena systemet. Sätt $\overline{z}(t) := \overline{y}(t) - \overline{x}_1(t)$. Då gäller:

$$\begin{aligned}\overline{z}'(t) = \overline{y}'(t) - \overline{x}_1'(t) &= \overline{A}(t)\,\overline{y}(t) - \overline{b}(t) - (\overline{A}(t)\,\overline{x}_1(t) - \overline{b}(t))\\ &= \overline{A}(t)\,(\overline{y}(t) - \overline{x}_1(t))\\ &= \overline{A}(t)\cdot\overline{z}(t)\end{aligned}$$

Därmed gäller $\overline{z}(t) \in V$ = lösningsmängden till det homogena systemet och vidare gäller

$$\overline{y}(t) = \overline{x}_1(t) + \overline{z}(t).$$

Därmed är satsen bevisad. □

Ur Satserna 115 och 116 följer då:

Korollarium 117. Den allmänna lösningen på intervallet I till det inhomogena systemet (141) kan skrivas i formen

$$\overline{x}(t) = \overline{F}(t)\cdot\overline{c} + \overline{F}(t)\cdot\int_{t_0}^{t} \overline{F}(s)^{-1}\cdot\overline{b}(s)\,ds, \qquad (144)$$

där $\overline{F}(t)$ är en fundamentalmatris till det homogena systemet och $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ är en godtycklig vektor.

Exempel 118. I Ex. 114 visades att det homogena systemet svarande mot

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (145)$$

har fundamentalmatrisen

$$\overline{F}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Med ansatsen $\overline{F}(t)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och likheten $\overline{F}(t)\cdot\overline{F}(t)^{-1} = I$ erhålls:

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t}+ce^{-t} & be^{2t}+de^{-t} \\ \frac{a}{2}e^{2t}+2ce^{-t} & \frac{b}{2}e^{2t}+2de^{-t} \end{bmatrix} \overset{\text{krav}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae^{2t}+ce^{-t} = 1 \\ \frac{a}{2}e^{2t}+2ce^{-t} = 0 \\ be^{2t}+de^{-t} = 0 \\ \frac{b}{2}e^{2t}+2de^{-t} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3}e^{-2t}, \ c = -\frac{1}{3}e^{t} \\ b = -\frac{2}{3}e^{-2t}, \ d = \frac{2}{3}e^{t} \end{cases}$$

Vi sätter $\overline{b}(t) = (e^{-t}, 0)^T$ och erhåller:

$$\overline{F}(t)^{-1}\overline{b}(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-2t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}e^{t} & \frac{2}{3}e^{t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-3t} \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

samt genom att sätta $t_0 = 0$ i (144):

$$\overline{F}(t)\int_0^t \overline{F}(s)^{-1}\cdot\overline{b}(s)\,ds = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \left[-\frac{4}{9}e^{-3s}\right]_0^t \\ \left[-1/3\cdot s\right]_0^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{4}{9}(1-e^{-3t}) \\ -1/3\, t \end{bmatrix} = \frac{3}{9}e^{-t}\cdot\begin{bmatrix} 2(e^{3t}-1) - \frac{3}{2}t \\ e^{3t} - 1 - 3\cdot t \end{bmatrix}$$

Därmed ges den allmänna lösningen till (145), med stöd av (144), av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \frac{3}{9}\cdot e^{-t}\cdot\begin{bmatrix} 2(e^{3t}-1) - \frac{3}{2}t \\ e^{3t} - 1 - 3\cdot t \end{bmatrix},$$

där $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.