## 3. Laplacetransformationen

Derivataoperatorn $D$ kan betraktas som en transformation som opererar på en deriverbar funktion $f(t)$ och ger en ny funktion $Df(t) = f'(t)$ i samma variabel $t$.

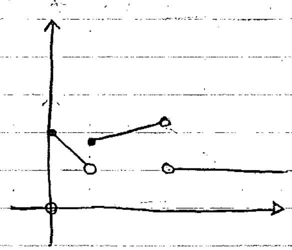
Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ är en integraloperator som ger en ny funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

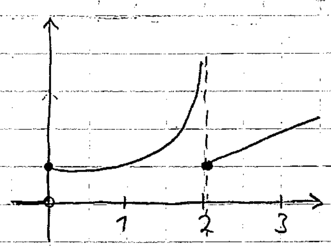
kallad Laplacetransformen, som beror av en ny variabel $s$.

Laplacetransformationen kan användas som ett verktyg för lösning av linjära DE:er med konstanta koefficienter i en variabel $y(t)$ genom transformation till en algebraisk ekvation i $Y(s)$.

Vi betraktar funktioner $f(t)$ definierade för "nästan" alla punkter $t \in [0,\infty)$ och som är styckevis kontinuerliga med ett ändligt antal diskontinuitetspunkter. Vi antar att i varje punkt $t_j$ där $f$ är diskontinuerlig existerar $\lim\limits_{t\to t_j^+} f(t)$ och $\lim\limits_{t\to t_j^-} f(t)$. Vidare antas att $f(t)=0$ för $t<0$.



$f(t)$ styckevis kont.




$f(t)$ ej styckevis kont.
$\lim\limits_{t\to 2^-} f(t)$ existerar ej.



## 3.1 Laplacetransformationen

Den formella definitionen av Laplacetransformationen ges av:

**Definition 58.** Antag att $f(t)$ är styckevis kontinuerlig på intervallet $[0,\infty)$. Laplacetransformen av $f(t)$ definieras som funktionen $F(s)$ given av integralen

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt. \tag{79}$$

Definitionsmängden för $F(s)$ utgörs av alla $s\in\mathbb{R}$ sådana att integralen (79) existerar. Laplacetransformen betecknas alternativt $\mathcal{L}\{f\}(s)$ och ibland med $\mathcal{L}f(s)$.

Anmärkning. Sambandet mellan $f$ och dess Laplacetransform $F$ kan uttryckas med symbolerna

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet F \quad \text{eller} \quad F \bullet\!\!-\!\!\circ f.$$

**Exempel 59.** För $f(t)\equiv 1$ på $[0,\infty)$ ges $F(s)$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s>0, \tag{80}$$

ty med stöd av (79) erhålls

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s}\right) \\ &= 1/s, \quad \text{om } s>0. \end{aligned}$$

Om $s\le 0$ är integralen divergent. Därmed ges definitionsmängden för $F(s)$ av $s>0$.

**Exempel 60.** För $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, ges $F(s)$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \qquad (81)$$

Kolla!

En del styckevis kontinuerliga funktioner saknar Laplacetransform. Exempelvis har funktionen $f(t) = e^{t^2}$ för snabb tillväxthastighet, $e^{-st} \cdot f(t) = e^{t^2 - st} \to +\infty$, då $t \to +\infty$ för varje $s \in \mathbb{R}$, och därmed är integralen (79) divergent för alla $s \in \mathbb{R}$.

För att få ett villkor för existens av $F(s)$ införs begreppet exponentiell ordning:

**Definition 61.** En funktion $f(t)$ är av exponentiell ordning $\alpha$ om det finns positiva konstanter $M$ och $T$ sådana att

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha \cdot t}, \quad \text{för } t \geq T. \qquad (82)$$

**Exempel 62.** a) Varje begränsad funktion, t.ex. $f(t) = \sin t$, är av exponentiell ordning (med $\alpha = 0$).

b) $f(t) = e^{5t} \cdot \sin 2t$ är av exponentiell ordning $\alpha = 5$, ty

$$|e^{5t} \cdot \sin 2t| \leq e^{5t},$$

så (82) gäller med $M = 1$ och $T > 0$.

c) $f(t) = e^{t^2}$ är inte av exponentiell ordning, ty

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \to \infty} e^{t^2 - \alpha t} = +\infty, \quad \text{för alla } \alpha \in \mathbb{R},$$

så $f(t)$ växer snabbare än $e^{\alpha t}$ för varje $\alpha \in \mathbb{R}$.



**Sats 63.** Antag att $f(t)$ är styckevis kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$ och av exponentiell ordning $\alpha$. Då existerar Laplacetransformen $F(s)$ för $s > \alpha$.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

En viktig egenskap för Laplacetransformationen är att den är en linjär operator:

**Sats 64.** Antag att $f_1(t)$ och $f_2(t)$ är styckevis kontinuerliga på $[0, \infty)$ med Laplacetransformerna $\mathcal{L}\{f_1\}(s)$ och $\mathcal{L}\{f_2\}(s)$ definierade för $s > \alpha$. Då har den styckevis kontinuerliga funktionen $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ en Laplacetransform $\mathcal{L}\{f\}(s)$ definierad för $s > \alpha$ given av:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f_1\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}(s), \qquad (83)$$

där $c_1$ och $c_2$ är konstanter.

Bevis: Integralens linjära egenskaper ger för $s > \alpha$ att:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt$$

$$= c_1 \mathcal{L}\{f_1\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}(s). \quad \square$$

**Exempel 65.** Definiera för $a \in \mathbb{R}$ $f(t) = \sinh(at)$ och $g(t) = \cosh(at)$. Då ges $F(s)$ och $G(s)$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|, \qquad (84)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|, \qquad (85)$$

Kolla!

## 3.2 Egenskaper för Laplacetransformen

I detta avsnitt behandlas några egenskaper för Laplacetransformationen som gör det enklare att bestämma Laplacetransformer samt att lösa begynnelsevärdesproblem. Först skall vi dock bestämma transformen för ännu en elementär funktion.

Exempel 66. För $f(t) = \sin bt$, $b \in \mathbb{R}$, ges $F(s)$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0. \qquad (86)$$

Använd formeln $\sin bt = \frac{1}{2i}\left(e^{bti} - e^{-bti}\right)$!

Följande dämpningsregel gäller:

Sats 67. Om Laplacetransformen $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existerar för $s > \alpha$ och $a \in \mathbb{R}$, så är

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad s > a+\alpha. \qquad (87)$$

Bevis: Enligt definitionen gäller

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt$$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$$

$$= F(s-a),$$

om $s - a > \alpha \iff s > a + \alpha$. ☐



Följande resultat samt Sats 70 är viktiga för lösningen av begynnelsevärdesproblem, som vi behandlar i avsnitt 3.3

Sats 68. Antag att $f(t)$ är kontinuerlig på intervallet $[0,\infty)$ och att $f'(t)$ är styckevis kontinuerlig på $[0,\infty)$ och att $f(t)$ och $f'(t)$ är båda av exponentiell ordning $\alpha$. Då gäller för $s > \alpha$ att

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0). \qquad (88)$$

Bevis. Se föreläsningsanteckningar.

Vi kan nu beräkna $\mathcal{L}\{\cos bt\}(s)$ med hjälp av Sats 68 och formel (86):

Exempel 69. För $f(t) = \cos bt$, $b \in \mathbb{R}$, ges $F(s)$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0, \qquad (89)$$

ty för $f(t) = \sin bt$, $f'(t) = b\cos bt$ gäller enligt Sats 68 för $s > 0$, ($f'$ av exponentiell ordning 0):

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

$$\iff$$

$$\mathcal{L}\{b\cos bt\}(s) = s\,\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) - 0$$

$$\iff \quad (\text{Sats } 64 \text{ och } (86))$$

$$b\,\mathcal{L}\{\cos bt\} = s \cdot \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\iff$$

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0. \;☐$$

Med hjälp av induktion bevisas följande generalisering av Sats 68:

Sats 70. Antag att $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ är kontinuerliga på $[0,\infty)$ och att $f^{(n)}(t)$ är styckevis kontinuerlig på $[0,\infty)$. Antag vidare att alla dessa funktioner är av exponentiell ordning $\alpha$. Då gäller för $s>\alpha$ att

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \dots - s\cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (90)$$

Bevis. Se föreläsningsanteckningar.

Vi fortsätter nu med projektet att härleda Laplacetransformer för elementära funktioner. I Exempel 59 visades att för $f(t)\equiv 1$ ges $F(s)$ av $F(s) = 1/s$, $s>0$.

Exempel 71. För $f(t) = t^n$, $n = 0,1,2,\dots$ ges $F(s)$ för $s>0$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0. \quad (91)$$

Bevisas med induktion (se föreläsningsanteckningar).

För $x>0$ definieras gammafunktionen $\Gamma(x)$ av

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Med hjälp av $\Gamma(x)$ kan vi generalisera formel (91) till reell exponent.



Exempel 72. För $f(t) = t^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>-1$, ges $F(s)$ för $s>0$ av

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s>0, \quad (92)$$

ty

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^\alpha\,dt = \frac{1}{s^\alpha}\int_0^\infty e^{-st}(st)^\alpha\,dt$$

$$\begin{pmatrix} x = st \\ dx = s\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{s^\alpha}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\cdot\frac{1}{s}\,dx = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{(\alpha+1)-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s>0.$$

Genom att tillämpa Sats 67: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$, $s>a+\alpha$, där $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ för $s>\alpha$, på funktionerna $\sin bt$, $\cos bt$, $\sinh bt$, $\cosh bt$ och $t^b$ erhålls följande Laplacetransformer:

Exempel 73. För $f_1(t) = \sin bt$, $f_2(t) = \cos bt$, $f_3(t) = \sinh bt$ och $f_4(t) = \cosh bt$, där $b\in\mathbb{R}$, samt $f_5(t) = t^b$, $b>-1$, erhålls med Sats 67 och formlerna (86), (89), (84), (85) och (92) att:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot\sin bt\} = F_1(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s>a, \quad (93)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot\cos bt\} = F_2(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s>a, \quad (94)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot\sinh bt\} = F_3(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}, \quad s>a+|b|, \quad (95)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot\cosh bt\} = F_4(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}, \quad s>a+|b|, \quad (96)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot t^b\} = F_5(s-a) = \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}, \quad s>0, b>-1, \quad (97)$$

Vi sammanfattar de beräknade transformerna i en tabell:

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $1/s\,,\quad s>0$ |
| $t^n$ | $n!/s^{n+1},\quad s>0,\ n=0,1,\dots$ |
| $t^\alpha$ | $\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1},\quad s>0,\ \alpha>-1$ |
| $e^{at}$ | $1/(s-a)\,,\quad s>a$ |
| $\sin bt$ | $b/(s^2+b^2)\,,\quad s>0$ |
| $\cos bt$ | $s/(s^2+b^2)\,,\quad s>0$ |
| $\sinh bt$ | $b/(s^2-b^2)\,,\quad s>\lvert b\rvert$ |
| $\cosh bt$ | $s/(s^2-b^2)\,,\quad s>\lvert b\rvert$ |
| $e^{at}\cdot t^n$ | $n!/(s-a)^{n+1},\quad s>0,\ n=0,1,\dots$ |
| $e^{at}\cdot t^b$ | $\Gamma(b+1)/(s-a)^{b+1},\quad s>0,\ b>-1$ |
| $e^{at}\cdot\sin bt$ | $b/((s-a)^2+b^2)\,,\quad s>a$ |
| $e^{at}\cdot\cos bt$ | $(s-a)/((s-a)^2+b^2)\,,\quad s>a$ |
| $e^{at}\cdot\sinh bt$ | $b/((s-a)^2-b^2)\,,\quad s>a+\lvert b\rvert$ |
| $e^{at}\cdot\cosh bt$ | $(s-a)/((s-a)^2-b^2)\,,\quad s>a+\lvert b\rvert$ |

Härledda egenskaper för Laplacetransformationen:

$$\mathcal{L}\{c_1 f+c_2 g\} = c_1\mathcal{L}\{f\}+c_2\mathcal{L}\{g\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-a) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \dots - s\cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$



## 3.3 Inversa Laplacetransformationen

I detta avsnitt behandlas problemet att givet en Laplacetransform $F(s)$ hitta en funktion $f(t)$ sådan att $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. Vi söker med andra ord en invers till Laplacetransformationen.

Användbarheten av en dylik invers illustreras av följande begynnelsevärdesproblem:

$$y'' - y = -t\,,\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1. \tag{98}$$

Beteckna $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ och Laplacetransformera båda leden i (98):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''-y\} &= \mathcal{L}\{y''\}(s) - \mathcal{L}\{y\}(s)\\ &= \left(s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - s\cdot y(0) - y'(0)\right) - Y(s)\\ &= s^2Y(s) - 1 - Y(s),\\ \mathcal{L}\{-t\}(s) &= -\mathcal{L}\{t\}(s) = -1/s^2.\end{aligned}$$

Alltså erhålls den algebraiska ekvationen

$$(s^2-1)Y(s) - 1 = -1/s^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1-1/s^2}{s^2-1} = \frac{s^2-1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2}.$$

Eftersom $\mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2 = Y(s)$ verkar det rimligt att $y(t)=t$ är lösningen till (98), vilket är lätt att verifiera.

Men $y(t)=t$ är inte den enda funktionen vars Laplacetransform är $1/s^2$. Exempelvis om

$$g(t) = \begin{cases} t, & t\geq 0,\ t\neq 6,\\ 0, & t=6\end{cases}$$

så är $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = 1/s^2$, eftersom Laplacetransformen är en integral som inte beror av integrandens värde i en isolerad punkt.

Skillnaden mellan $y(t)$ och $g(t)$ är att $y(t)$ är kontinuerlig på $[0,\infty)$. Då lösningar $y(t)$ till DE:er är kontinuerliga önskar vi bestämma en kontinuerlig invers till $F(s)$. Nu gäller följande resultat som ges utan bevis:

Sats 74. Antag att $f(t)$ och $g(t)$ är två kontinuerliga funktioner på $[0,\infty)$ med Laplacetransformer $F(s)$ respektive $G(s)$ existerande för $s>\alpha$. Om $F(s)=G(s)$ för alla $s>\alpha$, så är $f(t)=g(t)$ på $[0,\infty)$.

Alltså kan vi definiera en entydigt bestämd invers till Laplacetransformationen då vi håller oss till mängden av kontinuerliga funktioner på $[0,\infty)$.

Definition 75. Givet en funktion $F(s)$ definierad för $s>\alpha$. Om det finns en funktion $f(t)$ kontinuerlig på $[0,\infty)$ som uppfyller

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s), \qquad (99)$$

så kallas $f(t)$ den inversa Laplacetransformen av $F(s)$ och betecknas $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$.

Anmärkning. Om varje funktion $f(t)$ som uppfyller (99) är diskontinuerlig (och därmed inte en lösning till en DE), kan man välja en av dem till den inversa Laplacetransformen.

Även den inversa Laplacetransformen är linjär:

Sats 76. Antag att $\mathcal{L}^{-1}\{F_1\}(t)$ och $\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}(t)$ existerar och är kontinuerliga på $[0,\infty)$ och antag att $c_1, c_2$ är godtyckliga konstanter. Då gäller:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1 + c_2F_2\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}. \qquad (100)$$



Tabellerna på sida 77 kan användas för att bestämma inversa Laplacetransformationer:

Exempel 77. Bestäm $\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$ då

(a) $F(s)=\frac{2}{s^3}$, (b) $F(s)=\frac{3}{s^2+9}$, (c) $F(s)=\frac{s-1}{s^2-2s+5}$

(d) $F(s)=\frac{5}{s-6}+\frac{3}{2s^2+8s+10}$, (e) $F(s)=\frac{5}{(s+2)^4}$,

(f) $F(s)=\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}$.

Lösning av begynnelsevärdesproblem:

1. Beräkna Laplacetransformen av båda leden av DE:en
2. Använd egenskaperna för Laplacetransformen samt begynnelsevillkoren för att erhålla en algebraisk ekvation i $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Bestäm $Y(s)$.
3. Bestäm $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$ med hjälp av en tabell eller genom att dela upp $Y(s)$ i partialbråk och sedan utnyttja en tabell.

Exempel 78. Lös begynnelsevärdesproblemen

(a) $y''-2y'+5y=-8e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=12$,

(b) $y''+4y'-5y=te^{t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

### 3.4 Derivatan av Laplacetransformen

Antag att $f(t)$ är styckevis kont. på $[0,\infty)$ och av exponentiell ordning $\alpha$, $(|f(t)| \le M e^{\alpha t},\ t \ge T)$. Då gäller för $s \ge \gamma > \alpha$ och $n = 0,1,2,\ldots$ att

$$
\begin{aligned}
|e^{-st} t^n f(t)| &= e^{-st} \cdot t^n |f(t)| \le e^{-st} \cdot t^n \cdot M e^{\alpha t}, \quad t \ge T \\
&\le M \cdot t^n \cdot e^{-(\gamma-\alpha)t}, \quad t \ge T \\
&= M \cdot t^n \cdot e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t}, \quad t \ge T \\
&\le M \cdot k_n \cdot e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t}, \quad t \ge T, \qquad (101)
\end{aligned}
$$

där $k_n = \max t^n \cdot e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t}$, då $t \ge T$. Då existerar $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$ för $s \ge \gamma > \alpha$.

Vidare är uppskattningen (101) oberoende av $s$, då $s \ge \gamma > \alpha$. Därmed konvergerar Laplaceintegralen för $t^n f(t)$ likformigt m.a.p. $s$, för $s \ge \gamma > \alpha$.
$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,n} : \left|\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) - \int_0^N e^{-st} t^n \cdot f(t)\,dt\right| < \varepsilon\right.$ för $N > N_{\varepsilon,n}$ och alla $s \ge \gamma > \alpha$ (för fixt $n$))
Då nu $\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} \cdot t^n f(t)) = -e^{-st} t^{n+1} f(t)$, $n = 0,1,\ldots$, så är $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} \cdot t^n f(t))\,dt$ likformigt konvergent för $s \ge \gamma > \alpha$. Då säger en sats i FDA att integralen är lika med $\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$ för $s \ge \gamma > \alpha$.
Beteckna nu

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Då gäller:

$$
\begin{aligned}
F'(s) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} f(t))\,dt = -\int_0^\infty e^{-st} t \cdot f(t)\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) \\
F''(s) &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} t \cdot f(t))\,dt = \int_0^\infty e^{-st} t^2 f(t)\,dt \\
&= (-1)^2 \cdot \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

$$\underline{(-1)^n \cdot F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\}(s), \quad n = 0,1,2,\ldots}$$



Beteckna nu $R_n := \sup |t^n f(t)|$ för $t \in [0,T]$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^T e^{-st} \cdot t^n f(t)\,dt\right| &\le \int_0^T e^{-st} |t^n f(t)|\,dt \le R_n \cdot \int_0^T e^{-st}\,dt \\
&= R_n \cdot \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^T = R_n \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s} \to 0, \text{ då } s \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Med beaktande av (101) gäller för $s \ge \gamma > \alpha$ att:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_T^\infty e^{-st} t^n \cdot f(t)\,dt\right| &\le \int_T^\infty |e^{-st} t^n f(t)|\,dt \le M \cdot k_n \cdot \int_T^\infty e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t}\,dt \\
&= M \cdot k_n \left[-\frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)t}}{\gamma-\alpha}\right]_T^\infty = M \cdot k_n \cdot \frac{2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)T}}{\gamma-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Sätt $\gamma = s$ i ovanstående uppskattning:

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} \cdot t^n \cdot f(t)\,dt\right| \le M \cdot k_n \frac{2 e^{-\frac{1}{2}(s-\alpha)T}}{s-\alpha} \to 0, \text{ då } s \to +\infty.$$

Därmed gäller följande sats:

**Sats 79.** Antag att $f(t)$ är styckevis kontinuerlig på $[0,\infty)$ och av exponentiell ordning $\alpha$. Beteckna $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s > \alpha$. Då gäller för $n = 0,1,\ldots$:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s), \quad s > \alpha, \qquad (102)$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = 0. \qquad (103)$$

Ovanstående sats kan ibland tillämpas på lösningen av begynnelsevärdesproblem för linjära DE:er med icke-konstanta koefficienter:

**Exempel 80.** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2t \cdot y' - 4y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

## 3.5 Laplacetransformen av faltningen

**Definition 81.** Antag att $f(t)$ och $g(t)$ är styckevis kontinuerliga på $[0,\infty)$. Faltningen (eller konvolutionen) av $f(t)$ och $g(t)$ betecknas $(f*g)(t)$ och definieras av:

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-v)\cdot g(v)\,dv. \qquad (104)$$

Faltningen av två styckevis kontinuerliga funktioner är en kontinuerlig funktion på $[0,\infty)$.

**Exempel 82.** Om $f(t) = t$, $t \geq 0$, $g(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$

så ges $(f*g)(t)$ på $[0,\infty)$ av:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv = \int_1^t (t-v)\cdot v^2\,dv$$

$$= \left[\frac{tv^3}{3} - \frac{v^4}{4}\right]_1^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot t^4 - \frac{t}{3} + \frac{1}{4}.$$

Om $f(t)$, $g(t)$ och $h(t)$ är styckevis kontinuerliga funktioner på $[0,\infty)$ kan man lätt verifiera att faltningen har följande egenskaper:

$$f*g = g*f, \qquad (105)$$

$$(f*g)*h = f*(g*h), \qquad (106)$$

$$f*(g+h) = (f*g) + (f*h), \qquad (107)$$

$$f*0 = 0. \qquad (108)$$



Följande egenskap hos Laplacetransformen av en faltning är mycket användbar:

**Sats 83.** Antag att $f(t)$ och $g(t)$ är styckevis kontinuerliga på $[0,\infty)$ och av exponentiell ordning $\alpha$. Beteckna $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ och $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$. Då gäller för $s > \alpha$ att

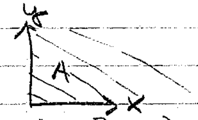
$$\mathcal{L}\{f*g\}(s) = F(s)\cdot G(s), \qquad (109)$$

eller, ekvivalent

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}(t) = (f*g)(t). \qquad (110)$$

**Bevis.** Antag att $s > \alpha$. Man kan visa att dubbelintegralen

$$\iint_A e^{-s(x+y)}\cdot|f(x)|\cdot|g(y)|\,dx\,dy,$$




$A = [0,\infty)\times[0,\infty)$

är konvergent*) då $f, g$ är styckevis kontinuerliga på $[0,\infty)$ och av exponentiell ordning $\alpha$.

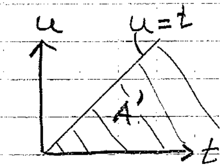
Med stöd av definitionen gäller för $s > \alpha$ att:

$$F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot f(x)\,dx \int_0^\infty e^{-sy}\cdot g(y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-s(x+y)}\cdot f(x)\cdot g(y)\,dy \right) dx$$

$$\overset{*)}{=} \iint_A e^{-s(x+y)}\,f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy$$

Gör variabelbyte: $\begin{cases} t = x+y \\ u = y \end{cases}$, $\begin{cases} x = t-u \\ y = u \end{cases}$




$$dx\,dy = \left|\frac{d(x,y)}{d(t,u)}\right|\cdot du\,dt = \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right|\cdot du\,dt$$

$$= du\,dt$$

Därmed erhålls att:

$$F(s)\cdot G(s) = \iint_{A'} e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du\,dt$$
$$= \int_0^\infty \left( \int_0^t e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du \right) dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du \right) dt$$
$$= \underline{\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s).} \quad \blacksquare$$

Vi belyser användningen av Sats 83 med hjälp av några exempel. I det första exemplet kan vi undvika partialbråksuppdelning:

Exempel 84. Visa med hjälp av Sats 83 att

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} = \frac{1}{2}\cdot(\sin t - t\cos t)$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

Vissa integralekvationer samt integro-differentialekvationer kan lösas med hjälp av faltningen:

Exempel 85. Lös integro-differentialekvationen

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-v)\cdot e^{-2v}\,dv, \quad y(0) = 1.$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

Även begynnelsevärdesproblem med obekant högerled kan lösas:

Exempel 86. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - y = g(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

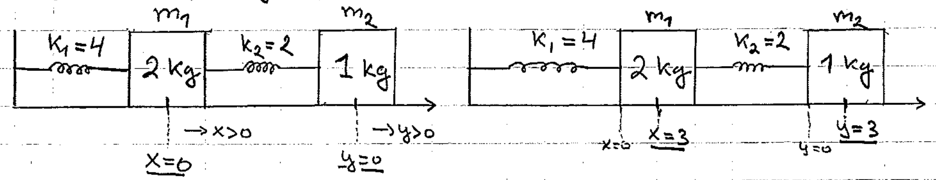
där $g(t)$ är styckvis kont. av exponentiell ordning $\alpha$ på $[0,\infty)$. (Se föreläsningsanteckningar)



## 3.6 System av ekvationer

I ett system av linjära DE:er med konstanta koefficienter kan varje ekvation Laplacetransformeras. Systemet blir då algebraiskt och kan lösas genom eliminering.

Exempel 87. Betrakta två massor $m_1$ och $m_2$ ihopkopplade med en fjäder med fjäderkonstant $k_2$. Massan $m_1$ är fästad till en vägg med en fjäder med fjäderkonstant $k_1$. Ingen dämpning i form av friktion eller luftmotstånd.




Om $x(t)$, $y(t)$ är massornas läge vid tiden $t$ gäller:

$$\begin{cases} m_1 x'' + (k_1+k_2)x - k_2 y = 0, \\ m_2 y'' + k_2 y - k_2 x = 0. \end{cases}$$

I vårt specialfall är utgångsläget vid $t=0$:

$$\begin{cases} 2x'' + 6x - 2y = 0, \\ y'' + 2y - 2x = 0, \end{cases} \quad x(0)=3,\ x'(0)=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=0.$$

Genom att Laplacetransformera ekvationerna och lösa ekvationssystemet med $X(s)$ och $Y(s)$ erhålls (kolla!)

$$\underline{x(t) = 2\cdot\cos t + \cos 2t}, \quad \underline{y(t) = 4\cos t - \cos 2t}.$$