2.3 Inhomogena ekvationer

Vid lösning av inhomogena ekvationer behöver vi, med stöd av Sats 37, enbart bestämma en partikulärlösning till $L(D)y = b$. Då kan det ibland vara behändigt att utnyttja superpositionsprincipen: antag att

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_m(x)$$

och att $L(D)y_{p_j} = b_j$, $j = 1, \dots, m$. Då gäller för

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + \dots + y_{p_m}(x)$$

att

$$L(D)y_p = L(D)(y_{p_1} + \dots + y_{p_m}) = L(D)y_{p_1} + \dots + L(D)y_{p_m}$$
$$= b_1(x) + \dots + b_m(x)$$
$$= b(x)$$

och y_p är en partikulärlösning till $L(D)y = b$.

Exempel 45. Bestäm en partikulärlösning till DE:en

$$y' + y = x + \sin x + \cos x + e^x.$$

Lösning: Sätt: $b_1(x) = x$, $b_2(x) = \sin x + \cos x$ och $b_3(x) = e^x$. Genom okulär besiktning ser vi lätt att vi kan välja:

$$y_{p_1}(x) = x - 1, \quad y_{p_2}(x) = \sin x, \quad y_{p_3}(x) = \tfrac{1}{2} e^x.$$

Tydligen är

$$y_p(x) = x - 1 + \sin x + \tfrac{1}{2} e^x$$

en partikulärlösning till DE:en.

Vi behandlar nu tre metoder för systematisk bestämning av partikulärlösningar:

A. Ansats med obestämda koefficienter

För vissa typer av högerled $b(x)$ kan vi göra standardansatser. Några exempel får illustrera metoden.

Exempel 46. Om $b(x) = P_m(x)$, där P_m är ett polynom av gradtal m, görs ansatsen $y_p(x) = q_m(x)$, där q_m är ett godtyckligt polynom av gradtal m, ifall $\lambda = 0$ inte är ett nollställe till $L(\lambda) = 0$. Annars görs ansatsen $y_p(x) = x^k q_m(x)$, där k är multipliciteten för nollstället $\lambda = 0$.

a) Bestäm en partikulärlösning till $y'' + y = x^2 + x$.

Lösning: $L(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ inte nollställe. Sätt

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Insättning i vänsterled ger: ($y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$)

$$y_p'' + y_p = (2A) + (Ax^2 + Bx + C)$$
$$= Ax^2 + Bx + (2A + C)$$
$$(\text{krav}) \quad \equiv x^2 + x,$$

vilket ger: $\{A = 1, B = 1, 2A + C = 0\} \iff \{A = 1, B = 1, C = -2\}$. En partikulärlösning ges därmed av:

$$y_p(x) = x^2 + x - 2.$$

b) Bestäm en partikulärlösning till $y''' - y'' = x^2 - 5$.

Att ansatsen i Ex. 46 alltid ger en partikulärlösning inses ur följande resonemang. Antag att $a_0 \neq 0$ och att

$$L(D)\,y_p(x) = P_m(x). \qquad (62)$$

Ur (62) följer att

$$D^{m+1}L(D)\,y_p = 0 \qquad (63)$$

och att den karakteristiska ekvationen till (63) ges av

$$\lambda^{m+1}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0.$$

Då $a_0 \neq 0$ är $\lambda = 0$ ett nollställe av multiplicitet $m+1$. Därmed ges lösningen till (63) av

$$y(x) = (c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0)\cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1} + y_h(x),$$

där $y_h(x)$ är den allmänna lösningen till $L(D)y = 0$. Vi har således en partikulärlösning $y_p(x)$ till (62) av formen $q_m(x)$ där q_m är ett polynom av gradtal m.

Om nu $\lambda = 0$ är ett k-faldigt nollställe till $L(\lambda) = 0$, så är $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ och (62) kan skrivas i formen

$$(D^{n-k} + a_{n-1}D^{n-k-1} + \dots + a_{k+1}D + a_k)(D^k y_p) = P_m(x).$$

Då $a_k \neq 0$ fås med ovanstående resonemang att det finns en partikulärlösning y_p sådan att

$$D^k y_p = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

och genom att integrera k gånger och sätta integrationskonstanterna till 0 erhålls

$$y_p(x) = x^k\cdot(d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \dots + d_1 x + d_0).$$

Exempel 47. Om $h(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot P_m(x)$, där P_m är ett polynom av gradtal m, görs ansatsen $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot q_m(x)$, där q_m är ett godtyckligt polynom av gradtal m, ifall $L(\lambda_0) \neq 0$. Om $L(\lambda_0) = 0$ och multipliciteten på nollstället λ_0 är k görs ansatsen $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot x^k\cdot q_m(x)$.

Detta kan motiveras på följande vis; antag att

$$L(D)\,y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot P_m(x).$$

Genom att multiplicera båda leden med $e^{-\lambda_0 x}$ fås

$$e^{-\lambda_0 x}L(D)\,y_p(x) = P_m(x)$$

$$\iff$$

$$e^{-\lambda_0 x}L((D+\lambda_0)-\lambda_0)\,y_p = P_m,$$

och då ger förskjutningsregeln att

$$L(D+\lambda_0)(e^{-\lambda_0 x}y_p) = P_m. \qquad (64)$$

Då ges karakteristiska polynomet L_1 till (64) av $L_1(\lambda) = L(\lambda+\lambda_0)$. Därmed är $L_1(0) \neq 0 \iff L(0+\lambda_0) \neq 0$. Med stöd av resonemanget på sida 51 är då, om $L(\lambda_0) \neq 0$, en partikulärlösning till (64) av formen

$$e^{-\lambda_0 x}\cdot y_p(x) = q_m(x)$$

$$\iff$$

$$y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot q_m(x),$$

och om $L(\lambda_0) = 0$ och multipliciteten är k på nollstället λ_0 så är

$$e^{-\lambda_0 x}\cdot y_p(x) = x^k\cdot q_m(x)$$

$$\iff$$

$$y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\cdot x^k\cdot q_m(x).$$

Exempel 48. Bestäm en partikulärlösning till DE:en

$$y'' + 2y' + y = x \cdot e^{-x}.$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningarna.

Exempel 49. Antag nu att $h(x) = P_m(x) \cdot e^{\gamma \cdot x} \cdot \cos(\omega x)$ eller $h(x) = P_m(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \sin(\omega x)$, där P_m är ett polynom av gradtal m och γ, ω är reella tal. Sätt $\lambda_0 = \gamma + i \cdot \omega$. Då är $(\bar{\lambda}_0 = \gamma - i \cdot \omega)$

$$P_m(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{\lambda_0 x} + e^{\bar{\lambda}_0 \cdot x}) = \frac{P_m(x)}{2} e^{\gamma x} (\cos \omega x + i \sin \omega x + \cos \omega x - i \sin \omega x)$$

$$= P_m(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \cos \omega x,$$

$$P_m(x) \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{\lambda_0 x} - e^{\bar{\lambda}_0 x}) = \ldots = P_m(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \sin \omega x.$$

Med stöd av superpositionsprincipen och Exempel 48 får vi då om $L(\lambda_0) \neq 0$ ansatsen

$$\begin{aligned} y_p(x) &= q_m^{(1)}(x)\, e^{\lambda_0 x} + r_m^{(1)}(x)\, e^{\bar{\lambda}_0 x} \\ &= e^{\gamma x}\big(q_m^{(1)}(x)(\cos \omega x + i \sin \omega x) + r_m^{(1)}(x)(\cos \omega x - i \sin \omega x)\big) \\ &= e^{\gamma x}\big((q_m^{(1)}(x) + r_m^{(1)}(x)) \cos \omega x + i \cdot (q_m^{(1)}(x) - r_m^{(1)}(x)) \sin \omega x\big) \\ &= e^{\gamma x}\,(q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x). \end{aligned}$$

Om $L(\lambda_0) = 0$ med multipliciteten k på nollstället λ_0, så görs analogt ansatsen

$$y_p(x) = e^{\gamma x} \cdot x^k \cdot (q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x),$$

där q_m och r_m är polynom av gradtal m i ansatserna.

Exempel 50. Bestäm en partikulärlösning till DE:en

$$y'' + y' + y = e^{-x} \cdot \cos 2x.$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

Vi sammanfattar de viktigaste ansatserna för olika högersidor $h(x)$. I tabellen nedan betecknar $P_m(x)$, $q_m(x)$ och $r_m(x)$ godtyckliga polynom av gradtal m.

Högerled	Ansats
$P_m(x)$	$q_m(x)$, om $L(0) \neq 0$
	$x^k \cdot q_m(x)$, om $\lambda = 0$ k-faldigt nollställe till $L(\lambda)$.
$P_m(x)\, e^{\gamma x}$	$q_m(x) \cdot e^{\gamma x}$, om $L(\gamma) \neq 0$
	$x^k \cdot q_m(x) \cdot e^{\gamma x}$, om γ är ett k-faldigt nollställe till $L(\lambda)$.
$P_m(x) \cdot \cos \omega x$ eller $P_m(x) \cdot \sin \omega x$	$q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x$, om $L(i\omega) \neq 0$
	$x^k (q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x)$, om $i\omega$ k-faldigt nollställe till $L(\lambda)$.
$P_m(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \cos \omega x$ eller $P_m(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \sin \omega x$	$e^{\gamma x}(q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x)$, om $L(\gamma + i\omega) \neq 0$
	$e^{\gamma x} \cdot x^k (q_m(x) \cos \omega x + r_m(x) \sin \omega x)$, om $\gamma + i\omega$ k-faldigt nollställe till $L(\lambda)$.

B. Lösning med förskjutningsregeln

För att tillämpa förskjutningsregeln faktoriseras $L(D)y = h$ i formen

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_n)y(x) = h(x),$$

där $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, rötterna till $L(\lambda)=0$, kan vara lika eller olika. Beteckna

$$z = (D-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_n)y$$

och bestäm en partikulärlösning z_p till

$$(D-\lambda_1)z = h(x).$$

Därefter betraktas ekvationen

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_n)y(x) = z_p(x),$$

som är av gradtal $n-1$. På detta sätt kan en partikulärlösning bestämmas i n steg.

Exempel 51. Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' + y' - 2y = e^x \cdot \sin^2 x$$

Lösning: $L(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)=0$, så $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2=-2$. Vi får

$$(D-1)(D+2)y = e^x \cdot \sin^2 x$$

Sätter $z = (D+2)y$ och löser

$$(D-1)z = e^x\cdot\sin^2 x \quad \Big|\cdot e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$e^{-x}(D-1)z = \sin^2 x$$

Då ger förskjutningsregeln att

$$D(e^{-x}z) = \sin^2 x$$

Nu är $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cdot\cos x) + C$ (kolla!), så vi väljer $C=0$ och erhåller

$$z(x) = \frac{e^x}{2}(x - \sin x\cdot\cos x).$$

Nu löser vi

$$(D+2)y = z = \frac{e^x}{2}(x-\sin x\cdot\cos x) \quad \Big|\cdot e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$e^{2x}(D+2)y = \frac{e^{3x}}{2}(x - \sin x\cdot\cos x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{(förskj. regeln)}$$
$$D(e^{2x}y) = \frac{e^{3x}}{2}(x-\sin x\cdot\cos x)$$

Då är $\int \frac{e^{3x}}{2}(x-\sin x\cdot\cos x)\,dx = e^{3x}\cdot\left(-\frac{11}{117}+\frac{x}{6}+\frac{1}{13}\cos^2 x - \frac{3}{26}\sin x\cos x\right)$

Därmed erhålls partikulärlösningen

$$y_p(x) = e^x\left(-\frac{11}{117}+\frac{x}{6}+\frac{1}{13}\cdot\cos^2 x - \frac{3}{26}\sin x\cdot\cos x\right).$$

För att lösa en ekvation med reellt högerled $h(x)$ kan man ibland utvidga $h(x)$ till en komplex funktion och söka en komplex partikulärlösning till denna. Då ger lösningens realdel en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen.

Exempel 52. Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Lösning: $h(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ix}}{\cos^2 x}\right].$

Betraktar istället ekvationen

$$y'' + y = \frac{e^{ix}}{\cos^2 x}$$

(Se föreläsningar)

C. Konstanternas variation

Konstanternas variation är en metod att få fram en partikulärlösning till en inhomogen linjär DE av n:te ordningen. Vi tittar först på ett exempel

Exempel 53. Bestäm en partikulärlösning till DE:en

$$y'' - y = \sin^2 x.$$

Lösning: Bestämmer först den allmänna lösningen till $y'' - y = 0$.

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1.$$

Då ges den allmänna lösningen av

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Nu görs ansatsen:

$$y(x) = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot e^{-x}$$

Derivering ger

$$y'(x) = \left(C_1'(x)\, e^x + C_2'(x) \cdot e^{-x}\right) + \left(C_1(x) e^x - C_2(x) \cdot e^{-x}\right).$$

Nu kräver vi att:

$$C_1'(x)\, e^x + C_2'(x) \cdot e^{-x} \equiv 0. \qquad (65)$$

Alltså: $y'(x) = C_1(x) \cdot e^x - C_2(x) \cdot e^{-x}$ och

$$y''(x) = \left(C_1'(x)\, e^x - C_2'(x)\, e^{-x}\right) + \left(C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}\right).$$

Då är

$$y''(x) - y(x) = C_1'(x)\, e^x - C_2'(x) \cdot e^{-x} \qquad (66)$$

Nu ger (65) och (66) ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)\, e^x - C_2'(x)\, e^{-x} = \sin^2 x. \end{cases}$$

Ur detta erhålls

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \cdot \sin^2 x \\ C_2'(x) = -\frac{1}{2} e^{x} \cdot \sin^2 x \end{cases}$$

Genom integrering av ovanstående uttryck erhålls (kolla!)

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{e^{-x}}{20}\left(-4 - 2\sin^2 x - 4\sin x \cos x\right) \\ C_2(x) = \frac{e^{x}}{20}\left(-4 - 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x\right) \end{cases}$$

Då erhålls partikulärlösningen

$$\underline{y_p(x)} = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x)\, e^{-x}$$
$$= \underline{-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\sin^2 x}.$$

Kontroll ger:

$$y_p'(x) = -\frac{2}{5}\sin x \cdot \cos x$$
$$y_p''(x) = -\frac{2}{5}\cos^2 x + \frac{2}{5}\sin^2 x$$

och därmed är

$$y_p''(x) - y_p(x) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sin^2 x - \frac{2}{5}\cos^2 x$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sin^2 x - \frac{2}{5}(1 - \sin^2 x)$$
$$= \sin^2 x,$$

Som sig bör.

Allmänt kan metoden med konstanternas variation sammanfattas i följande punkter:

1. Utgå från den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(D)y = 0$,

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

2. Gör ansatsen

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$$

för att hitta en partikulärlösning till $L(D)y = b$.

3. Bilda successivt derivatorna $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$. Vid de $n-1$ första deriveringarna läggs varje gång till ett nytt villkor på funktionerna $C_1(x), \dots, C_n(x)$. Eftersom

$$y'(x) = \left(C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x)\right) + \left(C_1(x) y_1'(x) + \dots + C_n(x) y_n'(x)\right)$$

Kräver vi att den första parentesen är noll, dvs.

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + \dots + C_n(x) y_n'(x)$$

Vid nästa derivering krävs att $C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0$, så vi erhåller

$$y''(x) = C_1(x) y_1''(x) + \dots + C_n(x) y_n''(x).$$

Efter den sista deriveringen sätts uttrycken för alla derivator in i DE:en $L(D)y = b$

och vi får då villkoret

$$C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = b(x).$$

Koefficientfunktionerna skall därmed väljas så att ekvationssystemet

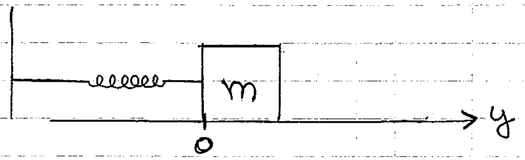
$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$

är satisfierat.

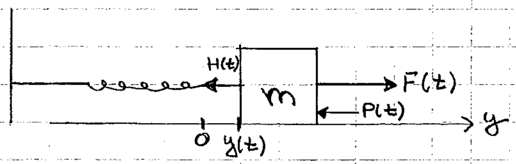
4. Lös ut $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ ur ovanstående ekvationssystem, som alltid har en entydig lösning enligt teori som utvecklas senare. Bestäm sedan $C_1(x), \dots, C_n(x)$ genom att integrera.

Exempel 54. Harmonisk oscillator.

Betrakta ett system bestående av en kropp med massan m fästad i en fjäder. Rörelsen sker längs en horisontal y-axel.



Jämviktsläge, otänjd fjäder.



Kroppens läge vid tiden t : $y(t)$.
Mot jämviktsläget återförande fjäderkraft:

$$H(t) = -k \cdot y(t) \;, \quad k > 0 .$$

Dämpande friktionskraft, direkt proportionell mot hastigheten $y'(t)$:

$$P(t) = -c\, y'(t) \;, \quad c \geq 0 .$$

Yttre kraft i horisontalled: $F(t)$.

Newtons andra lag ger att:

$$F(t) - k \cdot y(t) - c\, y'(t) = m \cdot y''(t) ,$$

Alltså erhålls DE:en

$$m y'' + c \cdot y' + k \cdot y = F(t) , \qquad (67)$$

där $m > 0$, $c \geq 0$ och $k > 0$.

Fri svängning ($F \equiv 0$)

Antag först att vi har fri rörelse, $F(t) \equiv 0$, och ingen dämpning, $c = 0$. Då är (67) av formen

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0 . \qquad (68)$$

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$L(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

med rötterna

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Sätt $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, detta är systemets egenvinkelfrekvens. Enligt korollarium 43 ges då den allmänna reella lösningen till (68) av

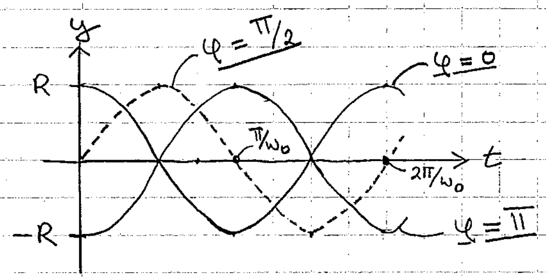
$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \,, \quad A, B \in \mathbb{R} .$$

Lösningen kan skrivas i formen

$$y(t) = R \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) , \qquad (69)$$

där $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ och φ är vald så att $A = R \cos\varphi$ och $B = R \sin\varphi$. (kolla!)

Lösningen är en harmonisk svängning med amplitud R och period $2\pi/\omega_0$. Vinkeln φ kallas fasvinkel.



Antag nu att vi har dämpning, $c > 0$, då fås DE:en

$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0. \qquad (70)$$

Sätt $\gamma = c/2m$ och $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Konstanten γ kallas dämpningskoefficient och ω_0 är den tidigare införda egenvinkelfrekvensen för motsvarande odämpade system. Ekvation (70) kan då skrivas i formen

$$y'' + 2\gamma \cdot y' + \omega_0^2 y = 0.$$

Rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 2\gamma \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

ges då av

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \qquad (71)$$

Vi får 3 fall:

1. Om $\gamma < \omega_0$, har vi svag (eller underkritisk) dämpning. Rötterna till $L(\lambda) = 0$ är komplexa:

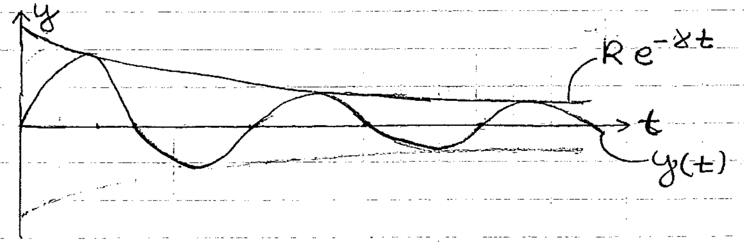
$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

De reella lösningarna ges enligt koroll. 43 av

$$y(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$
$$= R e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi),$$

där $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ och φ väljs så att $A = R \cos \varphi$ och $B = R \sin \varphi$.

Lösningen är då en dämpad harmonisk svängning kring jämviktsläget



2. Om $\gamma > \omega_0$, har vi stark (eller överkritisk) dämpning. Då är båda rötterna i (71) reella och negativa och lösningen är av formen:

$$y(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0.$$

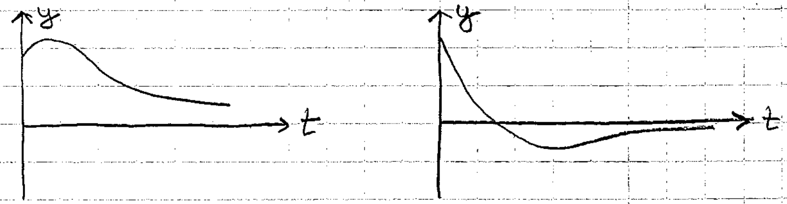
Detta fall kallas även det aperiodiska fallet.

3. Om $\gamma = \omega_0$, har vi kritisk dämpning. Då har vi en reell dubbelrot $\lambda_{1,2} = -\gamma$ och lösningen ges av

$$y(t) = (At + B) e^{-\gamma t}, \quad \gamma = c/2m > 0.$$

Detta fall kallas det aperiodiska gränsfallet.

I fallen 2. och 3. kommer systemet inte att oscillera kring jämviktsläget, utan bara röra sig mot det, eventuellt efter att ha passerat dit en gång. Ett par exempel på möjliga förlopp illustreras nedan, där båda kurvorna illustrerar såväl stark som kritisk dämpning:



Tvungna svängningar ($F \neq 0$)

Vi betraktar nu fallet med en yttre kraft som verkar på kroppen. Ett viktigt fall är då

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t), \quad F_0 > 0, \quad \omega > 0.$$

Vi undersöker enbart odämpade svängningar med $c = 0$. Vi får då DE:en

$$m y'' + k y = F_0 \cdot \cos \omega t.$$

Sätter $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ som tidigare. Lösningen till den homogena ekvationen ges av (69).

1. Om $\omega \neq \omega_0$, ges en partikulärlösning av $y_p = F_0 \cos \omega t / (m(\omega_0^2 - \omega^2))$, (kolla!), och lösningen ges av

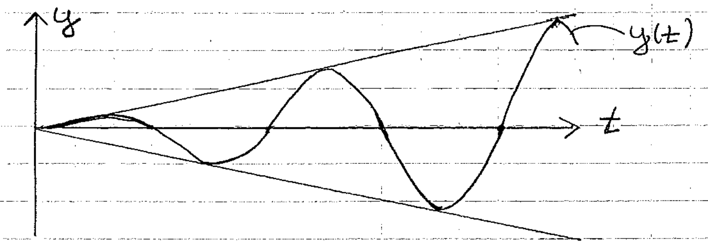
$$y(t) = R \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$

lösningen är summan av två harmoniska svängningar, en med frekvensen $\frac{\omega_0}{2\pi}$, systemets egenfrekvens och en med frekvens $\omega/2\pi$, den yttre kraftens frekvens.

2. Om $\omega = \omega_0$, är $y_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t$ en partikulär lösning (kolla!) och den allmänna lösningen är:

$$y(t) = R \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t,$$

en oscillerande lösning med växande amplitud. Fenomenet kallas resonans och uppträder då $\omega = \omega_0$.



2.4 Eulers differentialekvation

En differentialekvation av formen

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \quad (72)$$

där $a_0, \dots, a_{n-1}$ är konstanter, brukar kallas för en Eulers differentialekvation.

DE:en (72) är linjär men har inte konstanta koefficienter. Med variabeltransformationen:

$$x = e^t, \text{ då } x > 0 \quad (x = -e^t, \text{ då } x < 0),$$

fås en linjär DE med konstanta koefficienter. Då är t ny oberoende variabel och $y(t) = y(t(x))$, där $t(x) = \ln x$. Då erhålls:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}.$$

Alltså

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(= D_t y\right). \quad (73)$$

Derivering av båda leden i (73) m.a.p. x ger:

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x}$$

och därmed är

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = D_t(D_t - 1) y, \quad (74)$$

där vi utnyttjat att $x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ (enligt (73)).

Med induktion (kolla!) erhålls formeln:

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+1)\,y(t), \quad k=1,\dots,n. \qquad (75)$$

Variabelsubstitution i (72) ger då en linjär DE med konstanta koefficienter:

$$a_0 y + \sum_{k=1}^{n} a_k D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+1)\,y = f(e^t), \quad a_n=1, \qquad (76)$$

som har det karakteristiska polynomet:

$$L(\lambda) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1), \quad a_n=1. \qquad (77)$$

Man löser ekvationen $L(D_t)y = f(e^t)$ och sedan övergår man till de ursprungliga variablerna x och $y(x)$.

Vi formulerar lösningen till det homogena fallet $f(x)\equiv 0$ i en sats.

Sats 55. Antag att $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ är de olika nollställena till ekvationen $L(\lambda)=0$, där $L(\lambda)$ definieras av (77), och att $n_1,\dots,n_m$ är deras multiplicitet. Den allmänna lösningen till Eulers ekvation (72) med $f(x)\equiv 0$ är då

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} P_k(\ln x)\, x^{\lambda_k}, \quad x>0, \qquad (78)$$

där $P_k(t)$ är godtyckliga polynom i t av grad $\le n_k-1$.

Bevis: Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen till (76) är enligt Sats 41 av formen y_h:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)\, e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{m} P_k(\ln x)\, e^{\lambda_k \ln x} = \sum_{k=1}^{m} P_k(\ln x)\, x^{\lambda_k},$$

och därmed är $y(x) = y_h(\ln x)$ av formen (78). □

Anmärkning. För komplext μ definieras

$$x^{\mu} = e^{\mu \ln x}, \quad x>0.$$

Exempel 56. Lös DE:en $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, $x>0$.

Lösning: En Eulerekvation med $f(x)\equiv 0$. Sätter $x = e^t$, $t = \ln x$. Med stöd av (75) övergår DE:en i en linjär ekvation med konstanta koefficienter:

$$D_t(D_t-1)y - D_t y + 2y = 0$$
$$\iff y'' - 2y' + 2y = 0$$

Karakteristiska ekvationen: $L(\lambda)=0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, vilken har rötterna $\lambda_1 = -1+i$ och $\lambda_2 = -1+i$. Med stöd av Sats 55 har Eulerekvationen den allmänna komplexa lösningen

$$y(x) = C_1 x^{1+i} + C_2 x^{1-i}, \quad x>0.$$

Nu är

$$x^{1+i} = x\cdot x^{i} = x\,e^{i\ln x} = x\,(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)),$$
$$x^{1-i} = x\cdot x^{-i} = x\,e^{-i\ln x} = x\,(\cos(\ln x) - i\sin(\ln x)).$$

Om $C_1 = A_1 + iB_1$ och $C_2 = A_2 + iB_2$, så fås den reella lösningen:

$$y(x) = x\,(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)),$$

där $A = A_1 + A_2$ och $B = B_2 - B_1$. (kolla!)

Exempel 57. Lös DE:en $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln x$, $x>0$.

Lösning. Se föreläsningsanteckningar.