1.7 Variabelbyte i en differentialekvation

Vid integrering är det ofta fördelaktigt att göra ett variabelbyte när man beräknar en primitiv funktion eller en bestämd integral. Detsamma gäller vid lösning av DE:er. Såsom vid integrering kan det vara besvärligt att identifiera den rätta substitutionen. Vi skall behandla några typfall.

A. DE:er av formen $y' = f(ax+by+c)$

Här är a, b, c konstanter. Vi låter x kvarstå som oberoende variabel och sätter som ny beroende variabel $v(x) = ax+by+c$. Emedan

$$\frac{dv}{dx} = a + b\cdot\frac{dy}{dx} = a + b\,f(v)$$

övergår DE:en i den separerbara formen:

$$v' = a + b\,f(v)$$

Exempel 25. Lös DE:en $2y' = 3(1+2x+3y)^2$.

Lösning: $y' = \frac{3}{2}(1+2x+3y)^2$. Sätt $v(x) = 1+2x+3y$.

$$v' = 2 + 3y' = 2 + \frac{9}{2}\cdot v^2 \iff$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3/2}{1+(\frac{3}{2}v)^2}\cdot v' = 1$$

Lösningen i implicit form:

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\tfrac{3}{2}v\right) = x + C \iff$$

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\tfrac{3}{2}(1+2x+3y)\right) = x + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

I explicit form (i lämpligt intervall $x\in I_c$):

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\tan(3(x+c)) - 2x - 1\right).$$

B. DE:er av formen $y' = f(y/x)$.

Låt x kvarstå som oberoende variabel. Sätt som ny beroende variabel $v(x) = y/x$. Då är

$$y = xv \quad \text{och} \quad f(v) = y' = 1\cdot v + x\cdot v'.$$

Vi erhåller den separabla DE:en

$$x\cdot v' = f(v) - v.$$

Exempel 26. Lös DE:en $2xy\cdot y' = 4x^2 + 3y^2$, $x\neq 0$.

Lösning: Omskrivning ger: $y' = 2\cdot\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}$
Sätter $v(x) = y/x$ och $y' = 1\cdot v + x\cdot v'$ och då erhålls

$$v + x\cdot v' = 2\cdot\frac{1}{v} + \frac{3}{2}v$$

Som efter förenkling kan skrivas i formen

$$\frac{2v}{v^2+4}\,v' = \frac{1}{x}.$$

Alltså ges lösningarna i implicit form av

$$\ln(v^2+4) = \ln|x| + \ln e^{C_1}, \quad C_1\in\mathbb{R},$$

dvs

$$v^2 + 4 = C_2|x|, \quad C_2 > 0 \quad (C_2 = e^{C_1}),$$

eller med de ursprungliga variablerna

$$y^2 + 4x^2 = Cx^3,$$

där $C>0$ för $x>0$ och $C<0$ för $x<0$.

C. DE:er av formen $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Här är a, b, c, a_1, b_1 och c_1 konstanter.

1] Om $(a,b) = (0,0)$ eller $(a_1,b_1) = (0,0)$ så är DE:en av form $\boxed{A}$.

2] Om $(c,c_1) = (0,0)$ så är $y' = f\left(\frac{a+b\cdot\frac{y}{x}}{a_1+b_1\cdot\frac{y}{x}}\right)$, dvs av form $\boxed{B}$.

3] Om linjerna $ax+by+c=0$ och $a_1x+b_1y+c_1=0$ är parallella, så är DE:en av form $\boxed{A}$.

4] Om inget av fallen 1]–3] är uppfyllt låter vi (x_0,y_0) beteckna skärningspunkten för linjerna $ax+by+c=0$ och $a_1x+b_1y+c_1=0$. Vi inför nya variabler u och $v=v(u)$ genom

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0. \end{cases}$$

Då är $\frac{dv}{dx} = y'$ och $\frac{du}{dx} = 1$, så

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{dv}{dx}\right) / \left(\frac{du}{dx}\right) = y' = f\left(\frac{a(u+x_0)+b(v+y_0)+c}{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}\right)$$

$$= f\left(\frac{au+bv+\overbrace{(ax_0+by_0+c)}^{=0}}{a_1u+b_1v+\underbrace{(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}_{=0}}\right) = f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$$

$$= f\left(\frac{a+b(v/u)}{a_1+b_1(v/u)}\right).$$

Alltså är den transformerade DE:en av formen

$$v' = f\left(\frac{a+b(v/u)}{a_1+b_1(v/u)}\right),$$

dvs. av form $\boxed{B}$.

Exempel 27. Lös DE:en $y' = \frac{x+y-1}{x+4y+2}$.

Lösning: Linjerna definierade av täljaren och nämnaren har skärningspunkten $(x_0,y_0) = (2,-1)$. Vi inför u och v genom

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y + 1 \end{cases}$$

och erhåller DE:en

$$v' = \frac{(u+2)+(v-1)-1}{u+2+4(v-1)+2} = \frac{u+v}{u+4v} = \frac{1+v/u}{1+4\cdot v/u}.$$

Enligt $\boxed{B}$ kvarstår u som oberoende variabel och vi inför den beroende variabeln $t = v/u$. Då är $v' = 1\cdot t + u\cdot t'$ och

$$t + u\cdot t' = \frac{1+t}{1+4t} \iff \frac{1+4t}{1-4t^2}\cdot t' = \frac{1}{u}.$$

Genom partialbråksuppdelning erhålls då

$$\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{-2}{1-2t} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1+2t}\right)\cdot t' = \frac{1}{u}$$

Alltså erhålls lösningarna i implicit form genom:

$$-\frac{3}{4}\cdot\ln|1-2t| - \frac{1}{4}\ln|1+2t| = \ln|u| + \ln e^{c_1}$$

$$\iff$$

$$\ln\left(|1-2t|^3|1+2t|\right) = \ln\left(|u|^{-4}\cdot e^{-4c_1}\right)$$

$$\iff$$

$$|1-2t|^3|1+2t|\,u^4 = C_2, \quad C_2 > 0 \quad (C_2 = e^{-4c_1})$$

$$\iff$$

$$(1-2t)^3(1+2t)\,u^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\iff$$

$$\left(1-2\frac{v}{u}\right)^3\left(1+2\cdot\frac{v}{u}\right)u^4 = C$$

$$\iff$$

$$(u-2v)^3(u+2v) = C$$

$$\iff$$

$$\underline{(x-2y-4)^3(x+2y) = C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

D. Bernoullis differentialekvation

Bernoullis DE är av formen

$$y' + P(x)\,y = \varphi(x)\,y^m,$$

där m inte behöver vara ett heltal. Om $m = 0$ är DE:en linjär och inhomogen. Om $m = 1$ så är den separabel.

Antag nu att $m \neq 1$. Vi inför ny beroende variabel genom

$$v = y^{1-m}$$

och låter x kvarstå som oberoende variabel. Då erhålls

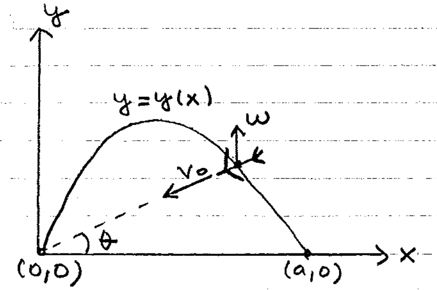
$$\frac{dv}{dx} = (1-m)\,y^{-m}\cdot y' = (1-m)\,\varphi(x) - (1-m)\,P(x)\,v$$

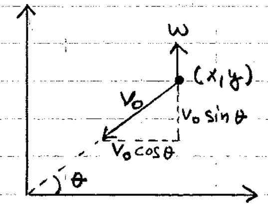
och den transformerade DE:en ges av:

$$v' + (1-m)\,P(x)\cdot v = (1-m)\,\varphi(x).$$

Exempel 28. Lös DE:en $xy' + 6y = 3x\,y^{4/3}$. (Hemuppgift).

Exempel 29. (Flygtrajektorier). Antag att ett flygplan startar vid ett flygfält i punkten $(a,0)$, $a>0$, och flyger till ett flygfält i punkten $(0,0)$. Planet flyger med konstant hastighet v_0 i förhållande till vinden som blåser i nordlig riktning med hastigheten w. Piloten håller planet i riktning mot $(0,0)$.





$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Planets hastighetskomponenter i förhållande till marken:

$$\frac{dx}{dt} = -v_0\cos\theta = -\frac{v_0\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0\sin\theta + w = -\frac{v_0\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w$$

Planets bana $y = y(x)$ uppfyller DE:en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{v_0 x}\left(v_0 y - w\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Vi sätter $k = \frac{w}{v_0}$ och får en DE av form B]

$$y' = \frac{y}{x} - k\cdot\left(1 + (y/x)^2\right)^{1/2}.$$

Sätter $v = y/x$, $y' = v + xv'$. Vi erhåller:

$$\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\cdot v' = -\frac{k}{x} \iff \ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = -k\ln x + C.$$

Begynnelsevillkoret $y(a) = 0$ ger $v(a) = y(a)/a = 0$, så $C = k\ln a + \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = k\cdot\ln a$. Alltså

$$\ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = \ln\left(\frac{a}{x}\right)^k \Rightarrow \sqrt{1+v^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^k - v$$

Kvadrering ger: $1 + v^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{2k} - 2v\left(\frac{a}{x}\right)^k + v^2 \iff v = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^k\right)$

Insättning av $y = vx$ ger planets bana

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right].$$

Om $k<1$ är $y(0) = 0$, om $k = 1$ är $y(0) = \frac{a}{2}$ och om $k>1$ så gäller $\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty$.

1.8 Riktningsfält och ortogonala trajektorier

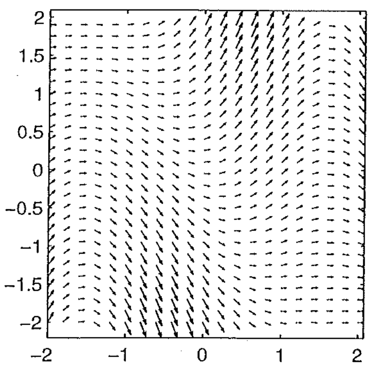
Betrakta DE:en

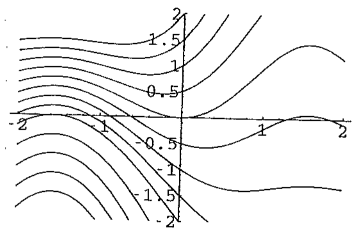
$$y' = f(x,y) \qquad (44)$$

där $f(x,y)$ är kontinuerlig i ett område V i $\mathbb{R}^2$. Då bestämmer ekvationen (44) i varje punkt $P=(x,y)$ tillhörande V en riktningskoefficient $f(P)=f(x,y)$. Med andra ord definierar (44) ett riktningsfält i V om vi med varje punkt $(x,y) \in V$ associerar en vektor $(1, f(x,y))$.

En lösningskurva till (44) karakteriseras av att tangenten i varje punkt P på kurvan har samma riktning som fältet. Tangenten till en eventuell lösningskurva genom en given punkt $P_0 = (x_0, y_0) \in V$ har alltså riktningskoefficienten $f(x_0, y_0)$.

Exempel 30. För $y' = f(x,y) = \sin 2x + y \cdot \cos x$, (DE:en löst som hemuppgift), får vi i $V = (-2,2) \times (-2,2)$ riktningsfältet och lösningskurvorna nedan





(Lösningskurvorna ges av: $y(x) = C e^{\sin x} - (2 \sin x + 1)$, $C \in \mathbb{R}$)

Antag att ekvationen

$$G(x, y, C) = 0 \qquad (45)$$

definierar en kurvskara i någon rektangel R i $\mathbb{R}^2$ då parametern C varierar i något intervall.

Problem I. Antag att G i (45) är kontinuerlig på rektangeln R med kontinuerliga partiella derivator. Kan vi bestämma en DE vars lösningskurvor i rektangeln R ges av (45)?

Antag nu att lösningskurvorna till en DE i R satisfierar ekvation (45). Vi skriver $G(x, y(x), C) = 0$. Då kan DE:en bestämmas, om vi kan eliminera parametern C ur ekvationssystemet:

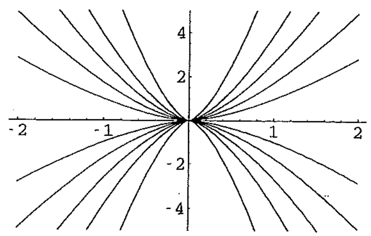
$$\begin{cases} G(x, y(x), C) = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot y'(x) = 0 . \end{cases} \qquad (46)$$

Exempel 31. Betrakta för $R_1 = \{(x,y) : x > 0\}$, $R_2 = \{(x,y) : x < 0\}$ och $C \in \mathbb{R}$ kurvskaran

$$y^2 - C x^3 = 0.$$

Genom att bilda ekvationssystemet (46) erhålls DE:en

$$3 \frac{y^2}{x} - 2y \cdot y' = 0, \quad x \neq 0. \quad \text{(kolla!)}$$



Figur 6. kurvor med $C = \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 15, \pm 50$.

Antag nu att kurvskaran $G(x,y,c)=0$ i (45) är sådan att varje punkt $(x_0,y_0)\in R$ genomlöps av precis en kurva i skaran, och att den kurvan har en tangent i (x_0,y_0).

Definition 32. En kurva K som är definierad i rektangeln R kallas en ortogonal trajektorie till kurvskaran $G(x,y,c)=0$, om i varje punkt $P_0=(x_0,y_0)$ på kurvan K tangenten står vinkelrätt mot tangenten genom P_0 för den kurva i skaran $G(x,y,c)=0$ som genomlöper P_0. Med andra ord skär K kurvskaran $G(x,y,c)=0$ vinkelrätt.

Problem II. Givet en kurvskara $G(x,y,c)=0$ som uppfyller ovanstående antaganden, samt antagandena i Problem I, bestäm de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $G(x,y,c)=0$.

Lösningen till Problem II kan delas upp i följande steg:

1. Lös Problem I, dvs. bestäm en DE $F(x,y,y')=0$ som i R har kurvskaran $G(x,y,c)=0$ som lösningskurvor.

2. Notera att DE:en $F(x,y,y')=0$ definierar ett riktningsfält D_1 i R. Då kommer det riktningsfält D_2 vars vektorer i varje punkt i R är ortogonala mot vektorerna i D_1 att ges av DE:en $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$.

3. Lös DE:en $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$. Lösningskurvorna i R till denna DE utgör de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $G(x,y,c)=0$.

Exempel 32. Bestäm i $R_1=\{(x,y): x>0\}$ och $R_2=\{(x,y): x<0\}$ de ortogonala trajektorierna till kurvskaran

$$y^2-cx^3=0.$$

Lösning: 1. Problem I löstes i Ex. 31 och gav oss DE:en

$$F(x,y,y')=0 \iff 3\frac{y^2}{x}-2yy'=0,\quad x\neq 0.$$

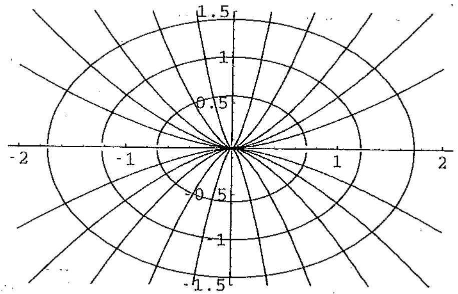
2. Bildar $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$,

$$3\cdot\frac{y^2}{x}-2y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \iff 2y+3\frac{y^2}{x}y'=0,\quad x\neq 0.$$

3. Lösningen av $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ ger de ortogonala trajektorierna till $y^2-cx^3=0$, nämligen

$$2x^2+3y^2=C,\quad C>0,\quad x\neq 0,$$

som är ellipser. (kolla!)



Figur 7. Kurvskaran $y^2-cx^3=0$ och de ortogonala trajektorierna $2x^2+3y^2=C$.

1.9 Några differentialekvationer av 2:a ordningen

Vi behandlar några typer av DE:er som kan överföras till DE:er av 1:a ordningen.

A. DE:er av formen $y'' = f(x, y')$

Genom substitutionen $z(x) = y'(x)$ överförs DE:en på en DE av formen

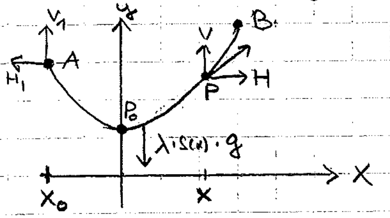
$$z' = f(x, z), \tag{47}$$

som kan lösas med våra tidigare metoder. Låt $z(x,c)$ beteckna den allmänna lösningen till (47). Då ges den allmänna lösningen till $y'' = f(x,y')$ av

$$y(x) = \int z(x,c)\,dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

Exempel 33. Kedjelinjen. Betrakta en fritt hängande böjlig, otänjbar och homogen lina upphängd i sina ändpunkter A och B. Vilken form antar linan?

Lösning: Vi väljer linans plan till xy-plan och antar att linans lägsta punkt P_0 ligger på y-axeln.



$P = (x,y)$ godt. punkt på linan.

$$s(x) = \text{båglängden } AP = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'(t)^2}\,dt,$$

där $y = y(x)$ linans ekvation.

λ = linans massa/längdenhet. Linan är böjlig $\Rightarrow$ att spänningen är tangentiellt riktad i varje punkt på linan. Stycket AP av linan påverkas av tyngdkraften $\lambda \cdot s(x) \cdot g$. Spänningens komponenter i A och P ges av V_1, H_1 respektive V, H.

Vi får jämviktsvillkoren för stycket AP:

$$\begin{cases} H + H_1 = 0 \\ V_1 + V - \lambda \cdot s(x) \cdot g = 0 \end{cases} \tag{49}$$

Nu har vi att $y'(x) = \frac{V}{H}$, så ur (49) erhålls:

$$y'(x) = \frac{\lambda \cdot s(x) \cdot g - V_1}{-H_1} = \frac{\lambda g}{-H_1} \cdot \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'(t)^2}\,dt + \frac{V_1}{H_1}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'(t)^2}\,dt + k, \quad a = \frac{-H_1}{\lambda g}, \; k = \frac{V_1}{H_1}.$$

Genom derivering av ovanstående ekvation får vi:

$$y''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'(x)^2}.$$

Inför nu i ovanstående DE $z = y'$; alltså

$$z' = \frac{1}{a}\sqrt{1+z^2},$$

en separabel DE som kan skrivas i formen

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, z' = \frac{1}{a}.$$

Denna DE har vi löst tidigare (jmf. Ex. 29):

$$\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \frac{x}{a} + C.$$

Genom att lösa ut z och utnyttja att $y'(0) = z(0) = 0$ fås:

$$z(x) = y'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right). \quad \text{(kolla!)}$$

Integrering enligt (48) ger nu:

$$y(x) = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}} + C.$$

Väljer koordinatsystemet så att $y(0) = a$. Då blir svaret:

$$y(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a = \frac{-H_1}{\lambda g}.$$

B. DE:er av formen $y'' = f(y, y')$

Antag att $y(x)$ är en lösning med $y'(x) \neq 0$ i ett intervall I. Då existerar inversa funktionen $x = x(y)$ i J. Vi tar nu y som oberoende variabel och inför $z(y) = y'(x(y))$. Då är

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(z(y)) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z.$$

Därmed satisfierar $z(y)$ DE:en

$$z \cdot z' = f(y, z), \tag{50}$$

och ur en lösning $z(y)$ till (50) fås en lösning till $y'' = f(y, y')$ genom att lösa DE:en $y' = z(y)$, som är separabel.

Exempel 34. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$yy'' + (y')^2 - yy' = 0, \quad y(\ln 2) = 2, \quad y'(\ln 2) = \frac{1}{2}.$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

2. Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

2.1 Definitionen och allmänna egenskaper

En DE av n:te ordningen är linjär med konstanta koefficienter om den kan skrivas i formen

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{51}$$

där $a_0, \dots, a_{n-1}$ är konstanter och b är en kontinuerlig funktion av x. Ekvationen (51) är homogen om $b(x) \equiv 0$ och inhomogen om $b(x) \not\equiv 0$.

Svarande mot det vänstra ledet i ekvationen definieras det karakteristiska polynomet för (51) genom

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \tag{52}$$

samt den karakteristiska ekvationen för (51) genom

$$L(\lambda) = 0. \tag{53}$$

Låt $D = \frac{d}{dx}$ beteckna deriveringsoperatorn, dvs för $f(x) \in C^n(I)$ gäller $D^n f(x) = f^{(n)}(x) \in C(I)$, $n = 1, 2, \dots$. Med symbolen $L(D)$ avses differentialoperatorn

$$L(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0, \tag{54}$$

som är distributiv och ger en kompakt framställning av vänsterledet i (51),

$$\begin{aligned} L(D)\,y(x) &= (D^n + \dots + a_1 D + a_0)\,y(x) \\ &= D^n y(x) + \dots + a_1 D y(x) + a_0 y(x) \\ &= y^{(n)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x). \end{aligned}$$

Alltså kan (51) skrivas i formen

$$L(D)\,y(x) = b(x). \tag{55}$$

Exempel 35. Betrakta DE:en

$$y'' + 2y' - 3y = \sin x \qquad (*)$$

Då ges det karakteristiska polynomet och differentialoperatorn av

$$L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3),$$
$$L(D) = D^2 + 2D - 3 = (D-1)(D+3).$$

Då kan $(*)$ skrivas i formen

$$L(D)y = \sin x \iff (D^2 + 2D - 3)y = \sin x$$
$$\iff (D-1)(D+3)y = \sin x.$$

Mängden $C(I)$ av kontinuerliga funktioner på intervallet I bildar ett vektorrum då vi för godtyckliga $f, g \in C(I)$ och godtycklig konstant $c \in \mathbb{R}, (\mathbb{C})$ definierar addition och multiplikation med skalär genom:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{för alla } x \in I,$$
$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \quad \text{— \, " \, —}.$$

För $C^n(I) \subseteq C(I)$ gäller att $f, g \in C^n(I)$ medför att $f + g \in C^n(I)$ och $cf \in C^n(I)$, så $C^n(I)$ är ett underrum av $C(I)$.

Differentialoperatorn $L(D)$ är då en avbildning från $C^n(I)$ till $C(I)$, dvs. $y \in C^n(I) \Rightarrow L(D)y \in C(I)$.

För att lösa DE:en (51) skall vi således finna alla funktioner $y \in C^n(I)$ sådana att

$$L(D)\,y(x) = b(x).$$

Sats 36. Differentialoperatorn $L(D) : C^n(I) \to C(I)$ är linjär, för godtyckliga $y_1, y_2 \in C^n(I)$ och alla konstanter c_1, c_2 gäller:

$$L(D)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(D) y_1 + c_2 L(D) y_2. \qquad (56)$$

Speciellt gäller: $L(D)(c_1 y_1) = c_1 L(D) y_1$.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

För att bestämma alla lösningar till (51) räcker det att:

1. finna en partikulärlösning y_p till $L(D)y = b$,
2. finna alla lösningar y_h till $L(D)y = 0$,

ty vi har nämligen att:

Sats 37. Låt $y_p(x)$ vara en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen $L(D)y(x) = b(x)$ och låt $y_h(x)$ vara den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(D)y(x) = 0$. Då ges den allmänna lösningen $y(x)$ till den inhomogena ekvationen (51) av

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x). \qquad (57)$$

Exempel 38. Lös DE:en

$$y'' - 3y' = 3\sin x - \cos x.$$

2.2 Homogena ekvationer

Betrakta den homogena ekvationen

$$L(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (58)$$

Vid lösning av (58) måste vi även beakta lösningar $y(x)$ som kan anta komplexa värden. Antag nu att koefficienterna i (51):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

är komplexa och att $h(x)$ antar komplexa värden. Då är en funktion

$$y(x) = u(x) + i\,v(x) \qquad (u, v \text{ antar reella värden})$$

med komplexa värden en komplex lösning till (51) om $L(D)y(x) = h(x)$. Derivering av $y(x)$ sker då termvis

$$y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + i \cdot v^{(n)}(x).$$

Om $a_0, \dots, a_{n-1}$ är reella konstanter i (58) så är $y(x) = u(x) + i v(x)$ en komplex lösning till (58) om och endast om $u(x)$ och $v(x)$ båda är reella lösningar till (58). (Kolla!)

Antag att rötterna till den karakteristiska ekvationen $L(\lambda) = 0$ ges av $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ med multipliciteterna $n_1, \dots, n_m$, $n_1 + \dots + n_m = n$. Då kan $L(\lambda)$ och $L(D)$ faktoriseras i formerna:

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{n_m},$$
$$L(D) = (D - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_m)^{n_m}.$$

Ekvation (58) kan i princip lösas stegvis genom att lösa en linjär ekvation av formen $(D-\lambda)z = g(x)$ n gånger. Vi behöver förskjutningsregeln:

Sats 39. Förskjutningsregeln. Om $g \in C^n(I)$ så gäller

$$L(D)(e^{\lambda x} g(x)) = e^{\lambda x} L(D + \lambda) \cdot g(x). \quad (59)$$

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

Exempel 40. Lös ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$.

Lösning: Vi har $L(D) = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$.

$$L(D)y = 0 \iff (D-1)^2 y = 0.$$

Antag att $y(x)$ är en godtyckligt vald lösning. Ekvationen $(D-1)z(x) = 0$ har den allmänna lösningen $z(x) = C_1 e^x$, $C_1 \in \mathbb{R}$, (kolla!). Nu är $(D-1)((D-1)y(x)) = 0$, så det måste gälla att

$$(D-1)y = C_1 e^x$$

för något värde på C_1. Sats 39 ger då att:

$$D(e^{-x}y(x)) = e^{-x}(D-1)y(x) = C_1.$$

Alltså är $e^{-x}y(x) = C_1 x + C_2$ för någon konstant C_2. Därmed är

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^x. \quad (60)$$

Omvänt, om $y(x)$ är av formen (60) för godtyckligt valda konstanter C_1, C_2 så kontrollerar man lätt att $y'' - 2y' + y = 0$. Därmed ges den allmänna lösningen till DE:en av (60).

Nästa resultat gör det möjligt att uppskriva den allmänna lösningen till en homogen DE så snart man känner till alla rötter till $L(\lambda)=0$ samt deras multipliciteter:

Sats 41. Låt $L(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$, där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är olika, vara det karakteristiska polynomet till $L(D)y(x) = 0$. Då är

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x)\, e^{\lambda_k x}, \tag{61}$$

där $p_k(x)$ är ett godtyckligt komplext polynom av gradtal högst $n_k - 1$ $(k=1,2,\ldots,m)$, den allmänna lösningen till $L(D)y(x) = 0$.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

Exempel 42. Lös DE:erna a) $y'' + y' - 2y = 0$
b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

Lösning: a) Vi har

$$L(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2) = 0$$

Alltså: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ enkla rötter, så

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

b) $L(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2 = 0$, så vi har dubbelroten 1 och enkla rötter $\pm i$.

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix}, \quad c_i \in \mathbb{C},\ i=1,\ldots,4.$$

Om (51) är en reell DE ($b(x)$ reellvärd och koefficienterna reella) är vi i allmänhet intresserade av reella lösningar:

Korollarium 43. Låt γ_k, $k=1,\ldots,l$ vara de olika reella rötterna samt låt $\lambda_k = \gamma_k \pm i\omega_k$, $k = l+1,\ldots,m$ vara de olika komplexa rötterna till en homogen, linjär DE med konstanta koefficienter. Låt vidare n_k $(k=1,\ldots,m)$ beteckna dessa rötters multiplicitet. Den allmänna reella lösningen är då en summa av termer av formen

$$q_k(x)\cdot e^{\gamma_k \cdot x}$$

för $k = 1,\ldots,l$, samt

$$q_k(x)\cdot e^{\gamma_k\cdot x}\cdot \cos(\omega_k x)$$
$$r_k(x)\cdot e^{\gamma_k\cdot x}\cdot \sin(\omega_k x)$$

för $k = l+1,\ldots,m$, där $q_k(x)$ och $r_k(x)$ är godtyckliga reella polynom av gradtal högst $n_k - 1$.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

Exempel 44. Den allmänna reella lösningen till DE:en $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$ ges då av:

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{x} + c_3\cdot\cos x + c_4 \sin x,$$

där $c_1,\ldots,c_4 \in \mathbb{R}$, ty $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0 \pm i\cdot 1$, $n_1 = 2$ och $n_2 = 1$.