5.4 Linjära ekvationer av ordning n

Vi behandlar för tydlighetens skull DE:er av ordning $n=3$. Allt kan dock direkt generaliseras till DE:er av godtycklig ordning. Betrakta ekvationen

$$y^{(3)} + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \qquad (146)$$

där $g(t)$ och $a_j(t)$, $j=0,1,2$, är kontinuerliga funktioner på något intervall. Med derivataoperatorn D och differentialoperatorn $L(t,D)$,

$$D = \frac{d}{dt}, \quad L(t,D) = D^3 + a_2(t)D^2 + a_1(t)D + a_0(t),$$

kan (146) skrivas i formen

$$L(t,D)y = g(t). \qquad (147)$$

Denna ekvation är ekvivalent med ett system

$$\bar{x}' = \bar{A}(t)\cdot\bar{x} + \bar{b}(t), \qquad (148)$$

där $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ och

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Alla lösningar till systemet (148) har alltså formen

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} \qquad (149)$$

där $y(t)$ löser (147). Om vi speciellt betraktar homogena system, $g(t) \equiv 0$ och $\bar{b}(t) = \bar{0}$, så ger varje bas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ för lösningarna till (148) via (149) en bas y_1, y_2, y_3 för lösningarna till (147), och omvänt.

Betrakta nu fundamentalmatrisen $\bar{F}(t)$ till det homogena system som hör till (148):

$$\bar{F}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix}. \qquad (150)$$

Determinanten det $\bar{F}(t)$ kallas Wronski-determinanten för funktionerna $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ och mängden $\{y_1, y_2, y_3\}$ av dessa funktioner kallas ett fundamentalsystem.

Beteckna raderna till (150) med $\bar{R}_1(t)$, $\bar{R}_2(t)$ och $\bar{R}_3(t)$. Då gäller:

$$\bar{R}_1'(t) = \bar{R}_2(t), \quad \bar{R}_1''(t) = \bar{R}_3(t).$$

Låt $\bar{F}(t)^{-1}$ ha kolonnerna $\bar{V}_1(t), \bar{V}_2(t)$ och $\bar{V}_3(t)$, $\bar{F}^{-1}(t) = (\bar{V}_1(t)\ \bar{V}_2(t)\ \bar{V}_3(t))$. Vi använder Sats 115 för att konstruera en lösning till det inhomogena systemet (148).

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} \overset{(142)}{=} \bar{F}(t)\int_{t_0}^{t} \bar{F}(s)^{-1}\cdot\bar{b}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{R}_1(t) \\ \bar{R}_2(t) \\ \bar{R}_3(t) \end{bmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} (\bar{V}_1(s)\ \bar{V}_2(s)\ \bar{V}_3(s)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \bar{R}_1(t) \\ \bar{R}_2(t) \\ \bar{R}_3(t) \end{bmatrix} \int_{t_0}^{t} \underbrace{\bar{V}_3(s)}_{\text{kolonnmatris}} g(s)\,ds$$

första komponenten ger en lösning $y(t)$ till (147),

$$y(t) = \bar{R}_1(t)\cdot\int_{t_0}^{t} \bar{V}_3(s)\,g(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \bar{R}_1(t)\cdot\bar{V}_3(s)\cdot g(s)\,ds,$$

där villkoret $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$ ger att $y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = 0$.

Då $\overline{R}_1(t)$ är en radvektor och $\overline{V}_3(s)$ en kolonnvektor är $\overline{R}_1(t)\cdot\overline{V}_3(s)$ ett reellt tal. Sätter vi

$$K(t,s) = \overline{R}_1(t)\cdot\overline{V}_3(s),$$

så är

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)\cdot g(s)\,ds$$

en partikulärlösning till $L(t,D)y = g(t)$ som uppfyller $y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = 0$.

Den reellvärda funktionen $K(t,s)$ av två reella variabler t och s kallas fundamentallösningen till operatorn $L(t,D)$. $K(t,s)$ kan karakteriseras på ett annat sätt:

Sats 119. Låt $L(t,\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ och $D = \frac{d}{dt}$. Beteckna med $K(t,s)$ (för fixt s) den entydigt bestämda lösningen till

$$\begin{cases} L(t,D)u = 0 \\ u(s) = u'(s) = \dots = u^{(n-2)}(s) = 0, \quad u^{(n-1)}(s) = 1. \end{cases} \quad (151)$$

Då är

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,g(s)\,ds \quad (152)$$

lösningen till problemet

$$\begin{cases} L(t,D)y = g(t) \\ y(t_0) = y'(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \quad (153)$$

Bevis. $(n=3)$. Eftersom begynnelsevärdesproblemet (151) har en entydigt bestämd lösning räcker det att verifiera att $K(t,s) = \overline{R}_1(t)\cdot\overline{V}_3(s)$ uppfyller (151). I så fall har vi redan visat att (152) löser (153).

Då y_1, y_2, y_3 är en bas till lösningsrummet till $L(t,D)u = 0$ och $\overline{R}_1(t)\cdot\overline{V}_3(s)$ är en linjärkombination

av y_1, y_2, y_3 (för fixt s) så är $K(t,s) = \overline{R}_1(t)\overline{V}_3(s)$ en lösning till $L(t,D)u = 0$. Bör visa att begynnelsevillkoren i (151) är uppfyllda. Bör visa att $K(s,s) = \overline{R}_1(s)\overline{V}_3(s) = 0$, $K'_t(s,s) = \overline{R}'_1(s)\cdot\overline{V}_3(s) = \overline{R}_2(s)\cdot\overline{V}_3(s) = 0$ och $K''_t(s,s) = \overline{R}''_1(s)\overline{V}_3(s) = \overline{R}_3(s)\cdot\overline{V}_3(s) = 1$. Vi utnyttjar att $\overline{F}(s)\cdot\overline{F}(s)^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} \overline{R}_1(s) \\ \overline{R}_2(s) \\ \overline{R}_3(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_1(s) & \overline{V}_2(s) & \overline{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R}_1(s)\overline{V}_1(s) & \overline{R}_1(s)\overline{V}_2(s) & \overline{R}_1(s)\overline{V}_3(s) \\ \overline{R}_2(s)\overline{V}_1(s) & \overline{R}_2(s)\overline{V}_2(s) & \overline{R}_2(s)\overline{V}_3(s) \\ \overline{R}_3(s)\overline{V}_1(s) & \overline{R}_3(s)\overline{V}_2(s) & \overline{R}_3(s)\overline{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså: $K(s,s) = 0$, $K'_t(s,s) = 0$ och $K''_t(s,s) = 1$. □

Exempel 120. Lös $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2} = \sin t^4$, $\begin{cases} t > 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 5. \end{cases}$

Lösning: homogena ekv. $\Leftrightarrow t^2y'' - 2ty' + 2 = 0$ (Eulerekv.)

$L(\lambda) = \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Allmänna lösningen till $L(t,D)y = 0$: $y_h(t) = c_1\cdot t + c_2\cdot t^2$.

Bestämmer fundamentallösningen $K(t,s)$ som enligt (151) bör uppfylla $y_h(s) = 0$, $y_h'(s) = 1$:

$$\begin{cases} y_h(s) = 0 \\ y_h'(s) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 s + c_2 s^2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1/s. \end{cases}$$

$\therefore$ $K(t,s) = -t + t^2/s$, $t, s > 0$

$y_p(t) = \int_1^t K(t,s)\,g(s)\,ds = \int_1^t (-t + t^2/s)\cdot\sin s^4\,ds$ är en partikulärlösning som uppfyller $y(1) = y'(1) = 0$, (Sats 119)

Allmänna lösningen: $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + c_1\cdot t + c_2\cdot t^2$

Kravet: $(y(1) = 2 \wedge y'(1) = 5)$ ger: $(c_1 + c_2 = 2 \wedge c_1 + 2c_2 = 5)$ $\Leftrightarrow c_1 = -1 \wedge c_2 = 3$.

Svar: $y(t) = 3t^2 - t + \int_1^t (-t + t^2/s)\sin(s^4)\,ds$.

6. Linjära differentialekvationer av 2:a ordningen

Linjära DE:er av 2:ordningen med variabla koefficienter är vanliga i många tillämpningar. En sådan DE har formen

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t), \qquad (154)$$

där p, q och g är kontinuerliga i något intervall I. Om $g \equiv 0$ i I är ekvationen homogen och inhomogen ifall $g \not\equiv 0$ i I. Vi kan också uttrycka (154) med hjälp av differentialoperatorn $L(t,D)$:

$$L(t,D)\,y = g(t), \qquad (155)$$

där $L(t,D) = D^2 + p(t)\cdot D + q(t)$, och $D = \frac{d}{dt}$.

Vi vet, (korollarium 109), att lösningsmängden V till den homogena ekvationen $L(t,D)\,y = 0$ är 2-dimensionell. För att hitta en bas till V bör vi ha ett lämpligt test på om två lösningar $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är linjärt oberoende. Detta test ges av Wronski-determinanten.

Definition 121. Antag att funktionerna $y_1(t), \dots, y_n(t)$ ligger i mängden $C^{(n-1)}(I)$ för något intervall I. Då definieras Wronski-determinanten $\forall t \in I$ genom:

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \qquad (156)$$

Speciellt gäller då i fallet $n=2$ att

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)\cdot y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t).$$

Sats 122. Om funktionerna $y_1(t)$ och $y_2(t)$ i $C^1(I)$ är linjärt beroende så är $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ på intervallet I.

Bevis. Då y_1 och y_2 är linjärt beroende existerar konstanter c_1, c_2 av vilka åtminstone den ena, säg c_2, är olika noll och

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Då är $y_2(t) = \frac{c_1}{c_2}\, y_1(t) = c\cdot y_1(t)$ $\forall t \in I$. $\left(c = \frac{c_1}{c_2}\right)$. Då gäller:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & c\,y_1(t) \\ y_1'(t) & c\,y_1'(t) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall t \in I. \ \square$$

Korollarium 123. Om $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$, så är $y_1(t)$ och $y_2(t)$ tillhörande $C^{(1)}(I)$ linjärt oberoende på I.

Bevis: Följer direkt ur Sats 122. $\square$

Exempel 124. a) Funktionerna $y_1(t) = \sin t$, $y_2(t) = \cos t$ är linjärt oberoende på $\mathbb{R}$, ty

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -(\sin^2 t + \cos^2 t) = -1 \neq 0 \ \forall t$$

b) Funktionerna $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \sin t$ är linjärt oberoende på $\mathbb{R}$, ty

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t \neq 0, \text{ då } t \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

c) Implikationerna i Sats 122 och korollarium 123 kan inte omvändas. Det finns funktioner y_1, y_2 på $\mathbb{R}$ som är linjärt oberoende och $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ på $\mathbb{R}$, (se föreläsningsanteckningar)

6.1 Homogena ekvationer

Vi betraktar nu den homogena ekvationen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{157}$$

eller kortare: $L(t,D)y = 0$.

Sats 125. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar till DE:en $L(t,D)y = 0$ på intervallet I och om $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$, så ges den allmänna lösningen till $L(t,D)y = 0$ av

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t). \tag{158}$$

Bevis: Då $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ ger koroll. 123 att y_1 och y_2 är linjärt oberoende på I. Därmed utgör y_1, y_2 en bas för det 2-dimensionella lösningsrummet V till $L(t,D)y = 0$. $\square$

Exempel 126. $y_1(t) = \sin t$ och $y_2(t) = \cos t$ är lösningar till DE:en $y'' + y = 0$. $W(y_1,y_2)(t) \equiv -1$ på $\mathbb{R}$, (Ex. 124 a)), så allmänna lösningen ges av $y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

Följande hjälpresultat visar att om $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ för något $t \in I$ och y_1, y_2 är lösningar till $L(t,D) = 0$, så är $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ för varje $t \in I$.

Lemma 127. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar till $L(t,D)y = 0$ på intervallet I, så gäller Abels formel:

$$W(y_1,y_2)(t) = C \cdot e^{-\int p(t)\,dt} \tag{159}$$

för alla $t \in I$, där C är en konstant.

Bevis: Se föreläsningsanteckningar.

Sats 128. Antag att $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar i intervallet I till ekvationen $L(t,D)y = 0$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

a) $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ för något $t \in I$;
b) $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ för varje $t \in I$;
c) $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är linjärt oberoende på I;
d) $y_1(t)$ och $y_2(t)$ bildar en bas till lösningsrummet för DE:en $L(t,D)y = 0$.

Bevis. 1) a) ⇒ b). Antag att a) gäller. Då måste konstanten C i (159) vara olika noll. Därmed gäller b).
2) b) ⇒ c). Antag att b) gäller. Då ger koroll. 123 att c) gäller.
3) c) ⇒ d). Antag att c) gäller. Då lösningsrummet V till $L(t,D)y = 0$ är 2-dimensionellt så gäller d).
4) d) ⇒ a). Antag att d) gäller. Välj $t_0 \in I$. Med stöd av Sats 104 har begynnelsevärdesproblemen:

$$\begin{cases} L(t,D)y = 0, \\ y(t_0) = 1,\ y'(t_0) = 0, \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} L(t,D)y = 0, \\ y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 1, \end{cases}$$

entydigt bestämda lösningar $z_1(t)$ respektive $z_2(t)$. Eftersom

$$W(z_1,z_2)(t_0) = \begin{vmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) \\ z_1'(t_0) & z_2'(t_0) \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1,$$

ger Sats 125 att z_1 och z_2 bildar en bas i lösningsrummet V till $L(t,D)y = 0$. Då är

$$y_1(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t),$$
$$y_2(t) = d_1 z_1(t) + d_2 z_2(t)$$

för ett entydigt bestämt val av konstanterna c_1, c_2, d_1 och d_2. Vi kan anta att $c_1 \neq 0$, ty $(c_1 = 0$ och $c_2 = 0) \Longrightarrow y_1(t) \equiv 0$, vilket inte kan gälla då $y_1(t), y_2(t)$ utgör en bas.

Nu gäller:

$$W(y_1,y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} c_1 z_1(t_0) + c_2 z_2(t_0) & d_1 z_1(t_0) + d_2 z_2(t_0) \\ c_1 z_1'(t_0) + c_2 z_2'(t_0) & d_1 z_1'(t_0) + d_2 z_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 .$$

Antites: $W(y_1,y_2)(t_0) = 0$. Då är $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$ och $d_2 = \frac{c_2}{c_1} d_1$, eftersom $c_1 \neq 0$. Alltså:

$$y_2(t) = d_1 z_1(t) + \frac{c_2}{c_1} d_1 z_2(t) = \frac{d_1}{c_1}\left(c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\right) =$$

$$= \frac{d_1}{c_1} \cdot y_1(t).$$

Om $d_1 = 0$ är $y_2(t) \equiv 0$, en motsägelse då $y_2(t)$ är en basfunktion. Om $d_1 \neq 0$ är y_1 och y_2 linjärt beroende, en motsägelse, då y_1, y_2 är en bas. Då gäller $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ och d) $\Rightarrow$ a). $\square$

Exempel 129. Funktionerna $y_1(t) = 1$ och $y_2(t) = \sin t$ i Ex. 124 b) är linjärt oberoende på $I = (-\infty, \infty)$, men de kan inte utgöra en bas för lösningsrummet V till någon ekvation $L(t,D)y = 0$ på I, ty

$$W(y_1,y_2)(t) = \cos t = 0, \quad \text{då } t = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot \pi .$$

Men däremot utgör $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \sin t$ en bas till lösningsrummet V för DE:en

$$y'' + \tan t \cdot y' = 0$$

på intervallet $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ty y_1, y_2 är lösningar till DE:en på intervallet I och

$$W(y_1,y_2)(t) = \cos t \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Nu ställer vi oss frågan: Hur bestämmer man en bas för lösningsrummet V till $L(t,D)y = 0$?

Vi beskriver en metod som bygger på att man har hittat en icke-trivial lösning till DE:en.

Antag att $y_1(t)$ är en lösning på intervallet I med $y_1(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. Gör ansatsen:

$$\begin{cases} y_2(t) = c(t)\, y_1(t) \\ y_2'(t) = c'(t)\, y_1(t) + c(t) \cdot y_1'(t) \\ y_2''(t) = c''(t)\, y_1(t) + 2c'(t)\, y_1'(t) + c(t)\, y_1''(t). \end{cases}$$

Insättning i $L(t,D)y = 0$ ger:

$$(c'' y_1 + 2c' y_1' + c y_1'') + p(t)(c' y_1 + c y_1') + q(t)\, c\, y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c\,(\underbrace{y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1}_{\equiv 0}) + c'' y_1 + c'(2y_1' + p(t) y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c'' + u(t)\, c' = 0, \qquad (160)$$

där $u(t) = (2y_1' + p(t) y_1)/y_1$. En integrerande faktor till (160) ges då av

$$\rho(t) = e^{\int u(t)\,dt}$$

och vi erhåller att

$$\frac{d}{dt}\left(\rho(t) \cdot c'(t)\right) = 0.$$

En lösning $c'(t)$ till (160) ges då av

$$c'(t) = (\rho(t))^{-1} = e^{-\int u(t)\,dt}$$

Därmed ges en lösning $c(t)$ till (160) av

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int u(s)\,ds}\, ds \qquad (161)$$

Då nu $\int u(t)\,dt = \int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(t)\right) dt = \ln|y_1|^2 + \int p(t)\,dt \ (+C)$ erhåller vi tydligen en andra lösning $y_2(t)$ som:

$$\underline{\underline{y_2(t)}} = y_1(t)\cdot C(t) = y_1(t)\cdot \int_{t_0}^{t} e^{\ln(y_1(s))^{-2} - P(s)}\, ds$$

$$= y_1(t)\cdot \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{(y_1(s))^2}\, ds, \qquad (162)$$

där $P(s)$ är en primitiv funktion till $p(s)$, $(P'(s) = p(s))$.

Är lösningarna y_1 och y_2 linjärt oberoende på I? Bildar Wronski-determinanten:

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & C(t)\,y_1(t) \\ y_1'(t) & C'(t)\,y_1(t) + C(t)\,y_1'(t) \end{vmatrix}$$

$$= y_1(C'y_1 + Cy_1') - y_1' C y_1 = C'(t)\,y_1(t)^2$$

$$\overset{(162)}{=} e^{-P(t)} \neq 0 \text{ för alla } t \in I.$$

Lösningarna är linjärt oberoende och de bildar därmed en bas för lösningsrummet till DE:en $L(t,D)y = 0$ på I.

Anmärkning. Det är bättre att behärska lösningsmetoden med ansats än att memorera formel (162).

Exempel 130. Verifiera att $y_1(t) = t$ är en lösning till DE:en

$$y'' + \frac{1}{t^2}y' - \frac{1}{t^3}y = 0, \quad t > 0.$$

Bestäm alla lösningar med substitutionen $y_2(t) = t\cdot u(t)$.

Exempel 131. Chebyshev polynomen $T_n(x)$ kan genereras med rekursions formeln:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x. \end{cases}$$

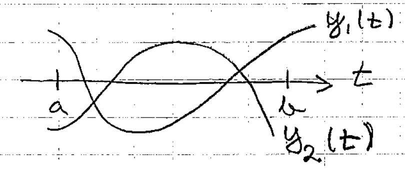
Polynomet $T_n(t)$ är en lösning till DE:en

$$(1-t^2)\,y'' - t\,y' + n^2\,y = 0. \qquad (163)$$

Bestäm för $n = 1$ den allmänna lösningen till ekvationen (163) i intervallet $I = (0,1)$.

Vi formulerar utan bevis följande resultat som är tillämpbart ifall åtminstone en av bas-funktionerna $y_1(t)$, $y_2(t)$ till lösningsrummet V till DE:en $L(t,D)y = 0$ har minst 2 olika reella nollställen:

Sats 132. (Sturms separationssats) Antag att $y_1(t)$ och $y_2(t)$ utgör en bas för lösningsrummet V till DE:en $L(t,D)y = 0$. Då har $y_1(t)$ precis ett nollställe mellan varje par av konsekutiva nollställen till $y_2(t)$, och omvänt.



, $I = [a,b]$

Exempel 133. Funktionerna $y_1(t) = a\cos t + b\sin t$ och $y_2(t) = c\cos t + d\sin t$ är lösningar till DE:en $y'' + y = 0$. Visa att nollställena till $y_1(t)$ och $y_2(t)$ separerar varandra om $ad - cb \neq 0$.

6.2 Inhomogena ekvationer

Vi är nu intresserade av att bestämma en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{164}$$

som även kan skrivas i formen $L(t,D)y = g(t)$. Den allmänna lösningen till (164) ges ju av summan av en partikulärlösning och den allmänna lösningen till $L(t,D)y = 0$.

Vi använder metoden med konstanternas variation för att bestämma en partikulärlösning. Antag att den allmänna lösningen till $L(t,D)y = 0$ ges av:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$

Vi gör ansatsen

$$y_p(t) = C_1(t)\cdot y_1(t) + C_2(t)\cdot y_2(t)$$

och bestämmer $C_1(t)$, $C_2(t)$ så att $L(t,D)y_p = g(t)$. Derivering ger:

$$y_p'(t) = C_1 y_1' + C_1' y_1 + C_2 y_2' + C_2' y_2$$

$$= (C_1(t)y_1' + C_2(t)y_2') + (C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2).$$

Vi kräver nu att

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{165}$$

Bildar $y_p''(t)$:

$$y_p''(t) = C_1'y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''.$$

Nu bildas $L(t,D)y_p$:

$$(C_1'y_1' + C_1 y_1'' + C_2'y_2' + C_2 y_2'') + p(t)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(t)(C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

$$= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2'$$

$$= C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t).$$

När vi kräver att $L(t,D)y_p = g(t)$ och beaktar (165) erhålls ekvationssystemet:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2'\cdot y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2'\cdot y_2' = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}. \tag{166}$$

Då y_1, y_2 är en bas till lösningsrummet V till $L(t,D)y = 0$, så är $W(y_1,y_2)(t) \neq 0\ \forall t \in I$. Därmed har ekvationssystemet (166) en entydigt bestämd lösning $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ för alla $t \in I$.

Multiplicera ekv. 1 i (166) med y_2' och ekv 2 med $-y_2$ så erhålls ur (166) att

$$C_1'(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -g\cdot y_2. \tag{167}$$

Multiplikation av ekv 1 med $-y_1'$ och ekv 2 med y_1 ger:

$$C_2'(y_1 y_2' - y_1' y_2) = g\cdot y_1. \tag{168}$$

Alltså erhålls:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{g(s)\,y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds, \\ C_2(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{g(s)\cdot y_1(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds. \end{cases} \tag{169}$$

Utredningarna sammanfattas i satsen:

Sats 134. Antag att $y_1(t)$ och $y_2(t)$ bildar en bas till lösningsrummet V till $L(t,D)y=0$. Då är $y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ en partikulärlösning till $L(t,D)y = g(t)$ om vi väljer C_1 och C_2 till

$$\begin{cases} C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{g(s)y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds, \\ C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)y_1(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds. \end{cases} \tag{170}$$

Anmärkning. En alternativ härledning av (170) ges av fundamentallösningen $K(t,s)$ till $L(t,D)y=0$. Med stöd av Sats 119 är $K(t,s)$ den lösning som uppfyller:

$$\begin{cases} y_h(s) = 0 \\ y_h'(s) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1y_1(s) + C_2y_2(s) = 0 \\ C_1y_1'(s) + C_2y_2'(s) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -y_2(s)/W(y_1,y_2)(s) \\ C_2 = y_1(s)/W(y_1,y_2)(s). \end{cases}$$

Då är

$$K(t,s) = \frac{-y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\cdot y_1(t) + \frac{y_1(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\cdot y_2(t)$$

och

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)g(s)\,ds$$

$$= y_1(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{-y_2(s)\cdot g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds + y_2(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)\cdot g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds.$$

Exempel 135. Lös DE:en $y'' - \frac{6}{t^2}\cdot y = -\sqrt{t}$, $t>0$.

Lösning: $L(t,D)y = 0 \iff y'' - \frac{6}{t^2}\cdot y = 0$

$\iff t^2y'' - 6y = 0$, Eulerekvation

$L(\lambda) = 0 \iff \lambda(\lambda-1) - 6 = 0 \iff (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

Allmänna lösningen till $L(t,D)y = 0$ ges av:

$$y_h(t) = c_1\cdot t^3 + c_2\cdot t^{-2}$$

Bestämmer fundamentallösningen $K(t,s)$: (Sats 119)

$$\begin{cases} y_h(s) = 0 \\ y_h'(s) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1\cdot s^3 + C_2s^{-2} = 0 \\ 3C_1\cdot s^2 - 2C_2s^{-3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1/5s^2 \\ C_2 = -s^3/5 \end{cases}$$

$$K(t,s) = \frac{t^3}{5s^2} - \frac{s^3}{5t^2}, \quad s,t>0.$$

Partikulärlösning $y_p(t)$ ges av:

$$y_p(t) = \int_1^t K(t,s)\cdot\sqrt{s}\,ds = \frac{t^3}{5}\cdot\int_1^t \underbrace{\frac{\sqrt{s}}{s^2}}_{=s^{-3/2}}\,ds - \frac{1}{5t^2}\int_1^t \underbrace{\sqrt{s}\,s^3}_{=s^{7/2}}\,ds$$

$$= \frac{t^3}{5}\cdot\left[-2\cdot s^{-1/2}\right]_1^t - \frac{1}{5t^2}\cdot\left[\frac{2}{9}\cdot s^{9/2}\right]_1^t$$

$$= \frac{t^3}{5}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{5t^2}\left(\frac{2}{9}t^{9/2} - \frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot t^3 + \frac{2}{45}t^{-2} - \frac{4}{9}t^{5/2}.$$

Svar: $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = d_1\cdot t^3 + d_2\cdot t^{-2} - \frac{4}{9}\cdot t^{5/2}$, $d_1,d_2\in\mathbb{R}$

7. System av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Vi undersöker linjära system av formen

$$\bar{x}' = A\cdot\bar{x}, \qquad (171)$$

där $\bar{x} = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ och A är en $n\times n$ matris med reella eller komplexa tal som element. Ett exempel på ett dylikt system ges av:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = i x_1 + 5x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}2 & -1\\ i & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

Om vi kan lösa det homogena systemet (171), dvs hitta en bas till lösningsrummet V, så kan vi med hjälp av en fundamentalmatris och Korollarium 117 lösa ett inhomogent system vars homogena del ges av (171).

Vi presenterar en lösningsmetod till (171) som bygger på existensen av n linjärt oberoende egenvektorer till A.

Definition 136. Talet $\lambda\in\mathbb{C}$ är ett egenvärde till matrisen A om det existerar en vektor $\bar{x}\neq\bar{0}$ sådan att

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}. \qquad (172)$$

Då kallas $\bar{x}$ en egenvektor till A svarande mot egenvärdet λ.

Egenvärdena till A ges av nollställena till det karakteristiska polynomet av gradtal n:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda\cdot I). \qquad (173)$$

Exempel 137. Bestäm egenvärdena och egenvektorerna till matrisen

$$A = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen för A ges av

$$p(\lambda)=0 \iff \det(A-\lambda\cdot I)=0 \iff \begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2-\lambda)(-2-\lambda)+3=0 \iff \underline{\lambda^2-1=0}.$$

Därmed ges egenvärdena till A av $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

Bestämmer egenvektorerna till $\lambda_1=1$ ur $(A-\lambda_1 I)\bar{x}=0$:

$$(A-\lambda_1\cdot I)\bar{x} = 0 \iff \begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff x_1-3x_2=0.$$

Sätt $x_2 = C\neq 0$. $x_1 = 3x_2 = 3C$. Därmed ges egenvektorerna svarande mot $\lambda_1=1$ av:

$$\bar{x} = C\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad C\neq 0. \qquad (174)$$

Egenvektorerna svarande mot $\lambda_2=-1$ ges av:

$$(A-\lambda_2\cdot I)\bar{x} = 0 \iff \begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff x_1-x_2=0.$$

Sätt $x_2 = C\neq 0$. $x_1 = x_2 = C$, alltså ges egenvektorerna av:

$$\bar{x} = C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad C\neq 0. \qquad (175)$$

Betrakta åter systemet (171), $\bar{x}' = A\cdot\bar{x}$. Om λ_1 är ett egenvärde till A och $\bar{x}_1$ en motsvarande egenvektor så gäller:

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\bar{x}_1 = 0 \Rightarrow A\,\bar{x}_1 = \lambda_1\,\bar{x}_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\cdot\bar{x}_1 = A(e^{\lambda_1 t}\cdot\bar{x}_1)$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{x}'(t) = A\cdot\bar{x}(t)},\ \underline{\text{där } \bar{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\cdot\bar{x}_1}.$$

Alltså är $e^{\lambda_1 t}\cdot\bar{x}_1$ en lösning till (171) om λ_1 är ett egenvärde och $\bar{x}_1$ motsvarande egenvektor.

Fråga: Kan vi hitta n linjärt oberoende lösningar till (171) genom att beräkna alla egenvärden och egenvektorer till A?

Sats 138. Om $n\times n$ matrisen A i (171) har n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ med motsvarande egenvärden $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, så är

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{x}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\bar{x}_n \qquad (176)$$

den allmänna komplexa lösningen till den homogena ekvationen (171).
Om alla egenvärden $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ är olika, så är egenvektorerna $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ linjärt oberoende.

Bevis. Se föreläsningsanteckningar.

Anmärkning. Man kan visa att en $n\times n$ matris A som är reell och symmetrisk ($A^T = A$) har reella egenvärden och n linjärt oberoende egenvektorer.

Exempel 139. Antag att en partikels rörelse i x_1x_2-planet ges av ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\qquad \bar{x}(0) = (2,1)^T.$$

Bestäm partikelns läge $\bar{x}(t)$ vid tiden $t\geq 0$.

Lösning: Med stöd av Ex. 137 har $A = \begin{pmatrix}2 & -3\\1 & -2\end{pmatrix}$ två olika egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ samt motsvarande egenvektorer

$$\bar{x}_1 = c\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad\text{och}\quad \bar{x}_2 = c\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Med stöd av Sats 138 är då $\bar{x}_1 = (3,1)^T$, $\bar{x}_2 = (1,1)^T$ linjärt oberoende och den allmänna lösningen ges då av:

$$\bar{x}(t) = c_1\cdot e^{\lambda_1 t}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2\cdot e^{\lambda_2 t}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

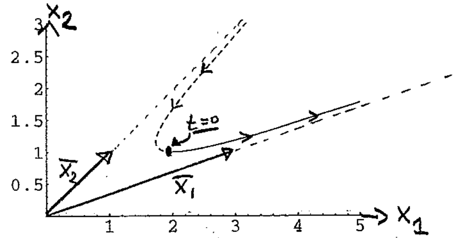
$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \bar{x}(0) = \begin{pmatrix}3c_1 + c_2\\ c_1 + c_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{c_1 = 1/2,\ c_2 = 1/2}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 3/2\, e^{t} + 1/2\, e^{-t}\\ x_2(t) = 1/2\, e^{t} + 1/2\, e^{-t}\end{cases} \qquad \underline{\text{Partikelns läge.}}$$

```
In[1]:= x1[t_] := 3 / 2 Exp[t] + 1 / 2 Exp[-t]

In[2]:= x2[t_] := 1 / 2 Exp[t] + 1 / 2 Exp[-t]

In[14]:= ParametricPlot[{{x1[t], x2[t]}, {x1[-t], x2[-t]}}, {t, 0, 2},
           PlotStyle -> {Dashing[{}], Dashing[{0.015, 0.015}]}, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 3}}]
```



Antag nu att A är en reell $n\times n$ matris och att vi är intresserade av de reella lösningarna till ekvationen $\bar{x}' = A\bar{x}$.

Låt $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, vara ett egenvärde till A med motsvarande egenvektor $\bar{z} = \bar{a} + i\bar{b}$, där $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är reella vektorer. Då är också $\bar{y} = \bar{a} - i\bar{b}$ en egenvektor svarande mot egenvärdet $\lambda_2 = \alpha - i\cdot\beta$ till A, ty om $\overline{}^{c}$ betecknar komplex konjugering så gäller:

$$A\bar{y} = \overline{(A\bar{z})}^{c} = \overline{(\lambda_1\bar{z})}^{c} = \lambda_2\bar{y}.$$

Därmed ges två linjärt oberoende lösningar till $\bar{x}' = A\bar{x}$ av

$$\begin{cases}\bar{v}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\bar{z} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\bar{a} + i\bar{b})\\ \bar{v}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\bar{y} = e^{(\alpha-i\beta)t}(\bar{a} - i\bar{b})\end{cases}$$

Omskrivning med hjälp av $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$ ger:

$$\begin{cases}\bar{v}_1(t) = e^{\alpha t}\{(\cos\beta t\cdot\bar{a} - \sin\beta t\cdot\bar{b}) + i(\sin\beta t\cdot\bar{a} + \cos\beta t\cdot\bar{b})\}\\ \bar{v}_2(t) = e^{\alpha t}\{(\cos\beta t\cdot\bar{a} - \sin\beta t\cdot\bar{b}) - i(\sin\beta t\cdot\bar{a} + \cos\beta t\cdot\bar{b})\}\end{cases}$$

Alltså $\bar{v}_1(t) = \bar{x}_1(t) + i\,\bar{x}_2(t)$ och $\bar{v}_2(t) = \bar{x}_1(t) - i\,\bar{x}_2(t)$. Nu är $x_1(t)$ och $x_2(t)$ reella lösningar till $\bar{x}' = A\bar{x}$, ty

$$\bar{x}_1'(t) + i\,\bar{x}_2'(t) = \bar{v}_1'(t) = A\bar{v}_1(t) = A\bar{x}_1(t) + i\,A\bar{x}_2(t).$$

Identifiera real- och imaginär delen! Därmed är $\bar{x}_1(t)$ och $\bar{x}_2(t)$ reella lösningar till $\bar{x}' = A\bar{x}$ associerade med egenvärdena $\alpha \pm i\cdot\beta$.

Med stöd av Sats 138 erhålls då följande korollarium:

Korollarium 140. Om A är en reell $n\times n$ matris med n linjärt oberoende egenvektorer, så svarar mot varje reellt egenvärde λ med motsvarande reella egenvektor $\bar{x}$ en reell lösning

$$e^{\lambda t}\cdot\bar{x}$$

Samt mot varje par av konjugerat komplexa egenvärden $\lambda = \alpha \pm i\cdot\beta$ med motsvarande egenvektorer $\bar{a} \pm i\bar{b}$ de reella lösningarna

$$e^{\alpha t}(\cos\beta t\cdot\bar{a} - \sin\beta t\cdot\bar{b}),$$
$$e^{\alpha t}(\sin\beta t\cdot\bar{a} + \cos\beta t\cdot\bar{b}).$$

Varje reell lösning är en linjärkombination av sådana lösningar.

Exempel 141. Bestäm alla reella lösningar till

$$\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}x(t).$$

Lösning: $p(\lambda) = 0 \iff \begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -1 & -3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$

Därmed har vi två egenvärden $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$.

Man kontrollerar lätt att $\bar{z}_1 = (2, -1+i)^T$ är en egenvektor svarande mot $\lambda_1 = -2+i$. Därmed är $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\bar{a} = (2,-1)^T$ och $\bar{b} = (0,1)^T$. Då ger koroll. 140 att alla reella lösningar ges av:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= c_1\cdot\left(e^{-2t}\cos t\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} - e^{-2t}\sin t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &\quad + c_2\left(e^{-2t}\sin t\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + e^{-2t}\cos t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &= c_1\begin{bmatrix}2e^{-2t}\cos t\\ -e^{-2t}(\cos t + \sin t)\end{bmatrix} + c_2\cdot\begin{bmatrix}2e^{-2t}\sin t\\ e^{-2t}(\cos t - \sin t)\end{bmatrix},\quad c_1, c_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$