Inledning

Algebran är tillräcklig för att lösa många statiska problem medan man t.ex. i fysiken studerar fenomen som involverar förändring av storheter och som bäst modelleras med ekvationer innehållande derivator av en obekant funktion.

En ekvation som innehåller en okänd funktion $y(x)$ av en oberoende variabel x och en eller flera av dess derivator $(y'(x), y''(x), \ldots)$ kallas en ordinär differentialekvation (ODE). Exempel på ODE:er är

$$y'(x) = 2x \qquad (\text{kortare: } y' = 2x), \qquad (1)$$
$$y'(x) - k\,y(x) = 0 \qquad (\text{kortare: } y' - ky = 0), \qquad (2)$$

där k är en reell konstant i (2).

En partiell differentialekvation (PDE) uttrycker ett samband mellan en funktion av flera variabler och vissa av dess partiella derivator. Värmeledningsekvationen i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

där $u(x,y,t)$ har tre variabler utgör ett exempel på en PDE. I fortsättningen behandlas endast ODE:er, vilka kort betecknas DE:er.

Betrakta problemet att finna alla deriverbara funktioner $y(x)$ som uppfyller en av ekvationerna (1) eller (2), för alla reella tal x. Vi säger att en sådan funktion y är en lösning till motsvarande DE.

Ekvationen (1) är av den enkla formen $y'(x) = f(x)$ och kan lösas genom direkt integration. Varje y som löser (1) är av formen

$$y(x) = x^2 + C \qquad (3)$$

där C är en konstant, och omvänt är varje y av formen (3) en lösning till (1).

I fallet (2) observerar vi att för varje deriverbar funktion y gäller identiteten

$$e^{kx}\left(y(x)\,e^{-kx}\right)' \equiv e^{kx}\left(y'(x)\,e^{-kx} - y(x)\,k\,e^{-kx}\right) \equiv y' - ky. \qquad (4)$$

Då $e^{kx} \neq 0$ för alla x är (2) ekvivalent med

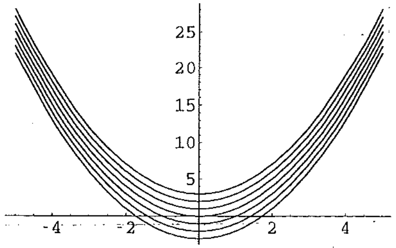
$$\left(y\,e^{-kx}\right)' = 0,$$

som är ekvivalent med att

$$y(x)\,e^{-kx} = C \iff y(x) = C\,e^{kx}, \qquad (5)$$

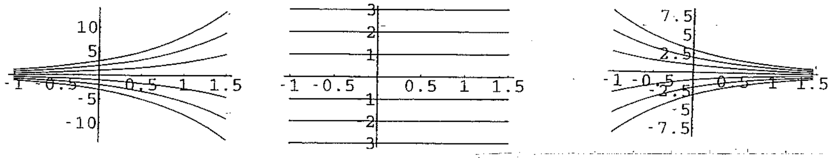
där C är en konstant.

För reella värden på C bildar funktionerna i (3) en kurvskara där varje kurva i skaran svarar mot ett värde på C.



Figur 1. $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ i (3).

För $k = 1, 0, -1$ i (5) erhålls följande kurvskaror för reella värden på C.



Figur 2. $k = 1, 0, -1$ i (5) och $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

Fixera k. Genom varje punkt (x_0, y_0) går precis en kurva i skaran (3) och i (5), ty C är i båda fallen entydigt bestämd av villkoren $y_0 = x_0^2 + C$ respektive $y_0 = C e^{k x_0}$.

Det finns med andra ord precis en lösning som i en given punkt x_0 antar värdet y_0 för dessa DE:er.

Exempel 1. (Enkel populationsmodell). Antalet individer i en population vid tidpunkten t antas kunna approximeras med en deriverbar funktion $P(t)$. Vidare antas populationsökningen under ett kort tidsintervall $(t, t+\Delta t)$ vara direkt proportionell mot Δt och $P(t)$ med proportionalitetskonstanten $k = 0{,}7$. Om antalet individer vid tiden $t = 0$ är $P(0) = P_0$, vilken är då populationsstorleken vid tiden t?

Lösning: Vi har att $P(t+\Delta t) - P(t) = k \cdot P(t) \cdot \Delta t$. Alltså gäller:

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} k \cdot P(t) = k \cdot P(t).$$

Därmed har vi för $t > 0$ att

$$P'(t) = k \cdot P(t), \qquad (6)$$

en DE som enligt (5) har lösningen

$$P(t) = C \cdot e^{kt},$$

där C är en reell konstant. Begynnelsevillkoret $P(0) = P_0$ ger att $P_0 = P(0) = C \cdot e^0 \iff C = P_0$. Således är

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0{,}7t}$$

lösningen till vårt problem. DE:en (6) tillsammans med begynnelsevillkoret $P(0) = P_0$ utgör ett begynnelsevärdesproblem.

Definition 2. En DE av ordningen n har den allmänna formen

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (7)$$

där $y = y(x)$ är den sökta funktionen. Om $y^{(n)}$ kan framställas som en funktion av $x, y, \ldots, y^{(n-1)}$, så är DE:en skriven i normalform:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (8)$$

En linjär DE är av formen

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)\, y' + f_n(x)\, y = g(x).$$

Den är homogen om $g(x) \equiv 0$ och inhomogen om $g(x) \not\equiv 0$.

I (1) har vi en DE i normalform och den är dessutom linjär och inhomogen. DE:en i (2) är på allmän form, den är linjär och homogen. Båda DE:erna är av första ordningen.

Beteckningar: För ett givet intervall I betecknar vi med $C(I)$ mängden av kontinuerliga funktioner $f: I \to \mathbb{R}$.
Med $C^n(I)$ betecknas mängden av alla funktioner $f \in C(I)$ sådana att alla derivator $f^{(k)}(x)$ av ordning $k = 1, \ldots, n$ existerar och är kontinuerliga på I. Då inget speciellt intervall avses skriver vi $C, C^1, \ldots, C^n$.

Definition 3. En lösning till (7) i ett intervall I är en funktion $y(x)$, definierad på I, sådan att

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv 0$$

i hela I. En funktion $y(x)$ är en lösning till (7) om den är en lösning till (7) i något intervall I. Två DE:er är ekvivalenta om de har samma lösningar.

Exempel 4. DE:erna $y' = 1 + (y')^2$ och $y'y = y + y(y')^2$ är inte ekvivalenta, ty den senare har lösningen $y(x) \equiv 0$, vilken inte är en lösning till den förra.
Inte heller DE:erna $y' + y^2 = 0$ och $y'' + 2yy' = 0$ är ekvivalenta, ty den senare har lösningar $y(x) \equiv c \neq 0$ som ej löser $y' + y^2 = 0$. Notera dock att varje lösning till den första löser den senare emedan $y''(x) + 2y(x)y'(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(y'(x) + y(x)^2\right)$.

1. Differentialekvationer av 1:a ordningen

I detta kapitel studeras lösningstekniker för olika typer av första ordningens DE:er. Vanligtvis är ekvationen given i formen

$$y' = f(x,y), \tag{9}$$

där f är en kontinuerlig och reellvärd funktion i ett område V i $\mathbb{R}^2$.

1.2 Direkt integration

Det enklaste fallet erhålls om $f(x,y)$ i (9) är oberoende av y, dvs.

$$y' = f(x) \tag{10}$$

och f är kontinuerlig på intervallet I. Då ges alla lösningar till (10) på I av

$$y(x) = F(x) + c, \tag{11}$$

där $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$ och $c \in \mathbb{R}$.

Begynnelsvillkoret $y(x_0) = y_0$ ger att $y_0 = F(x_0) + c$, varför $c = y_0 - F(x_0)$.

Med detta val av c får vi en partikulärlösning till (10) som satisfierar begynnelsvärdesproblemet

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

i intervallet I.

Exempel 5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, \quad y(4) = 2.$$

Även DE:er av formen

$$y'' = f(x), \tag{12}$$

där f är kontinuerlig på ett intervall I kan lösas genom direkt integration. Låt $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$. Då erhålls

$$y'(x) = F(x) + C_1, \tag{13}$$

där C_1 är en godtycklig reell konstant. Beteckna med $G(x)$ en primitiv funktion till $F(x)$ på I, dvs. $G'(x) \equiv F(x)$ på I. Då ges alla lösningar till (12) och (13) på intervallet I av

$$y(x) = G(x) + C_1 x + C_2, \tag{14}$$

där C_1, C_2 är godtyckliga reella konstanter.

Begynnelsevillkoren $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ gör det möjligt att bestämma konstanterna C_1, C_2, vi får ur (13) att $C_1 = y_1 - F(x_0)$ och därefter ur (14) att $C_2 = y_0 - G(x_0) - C_1 \cdot x_0$. Därmed erhålls en partikulärlösning till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Med direkt integration kan många problem involverande rörelse av en partikel lösas.

Exempel 6. Rörelse av en partikel längs en rät linje (x-axeln) beskrivs genom partikelns lägesfunktion

$$x = f(t)$$

som anger dess x-koordinat vid tidpunkten t. Hastigheten $v(t)$ och accelerationen $a(t)$ vid tidpunkten t är definierade genom

$$v(t) = f'(t) = x'(t),$$
$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Den kraft $F(t)$ som verkar på partikeln i dess rörelseriktning ges av

$$F(t) = m \cdot a(t),$$

där m är partikelns massa. Om kraften $F(t)$ är känd kan ekvationen

$$x'' = \frac{F(t)}{m}$$

lösas genom direkt integration. Vi får en lösning av form (14) med två godtyckliga konstanter C_1 och C_2 som kan bestämmas med hjälp av begynnelseläget $x(0) = x_0$ och begynnelsehastigheten $v(0) = v_0$ för partikeln.

Om kraften är konstant $F(t) = F$ så blir accelerationen konstant, $a = F/m$ och vi erhåller lösningarna

$$v(t) = at + v_0, \tag{15}$$
$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \tag{16}$$

för hastigheten respektive läget för partikeln. (Kolla!)

1.3 Existens och entydighet av lösningar

Innan vi övergår till att studera DE:er av formen $y' = f(x,y)$, där $f(x,y)$ inte är oberoende av y, skall vi ge tillräckliga villkor på f för att begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

skall ha en entydigt bestämd deriverbar lösning $y(x)$ i ett öppet intervall I med $x_0 \in I$.

Om vi har ställt upp DE:en för att modellera ett fenomen som är entydigt bestämt av ett givet begynnelsevillkor, så vore det önskvärt att få en entydig lösning på begynnelsevärdesproblemet. Kravet att $f(x,y)$ är kontinuerlig i en omgivning av (x_0, y_0) i $\mathbb{R}^2$ garanterar (lokalt) existensen av en lösning, men inte entydigheten!

Exempel 7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(1) = 0.$$

Då är $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ kontinuerlig i varje omgivning av $(1,0)$. Vi noterar att $y(x) \equiv 0$ är en trivial lösning. Definiera för $b > 1$

$$y_b(x) = \begin{cases} (x-b)^2, & x > b, \\ 0, & -b \le x \le b, \\ -(x+b)^2, & x < -b. \end{cases}$$

Funktionen y_b är deriverbar i hela $\mathbb{R}$, även i $x = \pm b$, ty

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(y_b(b+h) - y_b(b)\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(h^2 - 0\right) = 0,$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}\left(y_b(b+h) - y_b(b)\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}\left(0 - 0\right) = 0,$$

Så $y_b'(b) = 0$. Analogt fås att $y_b'(-b) = 0$.

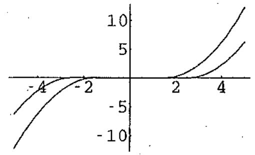
För $-b \le x \le b$ gäller $y_b' \equiv 0 \equiv 2\sqrt{|y_b|}$. Då $x > b$ gäller:

$$y_b'(x) = 2(x-b) = 2\sqrt{(x-b)^2} = 2\sqrt{|y_b(x)|}$$

och för $x < -b$ erhålls

$$y_b'(x) = -2(x+b) = 2\sqrt{(-(x+b))^2} = 2\sqrt{|y_b(x)|}.$$

Vidare gäller $y_b(1) = 0$ för $b > 1$. Därmed har begynnelsevärdesproblemet oändligt många lösningar. Två av dessa är skisserade nedan:



Figur 3. $y_b(x)$ för $b = 3/2, 5/2$.

Följande viktiga resultat, som garanterar existensen av en entydig lösning, bevisas senare.

Sats 8. Antag att den reellvärda funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på någon rektangel i planet som innehåller punkten (a,b) i dess inre. Då har begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = b \qquad (17)$$

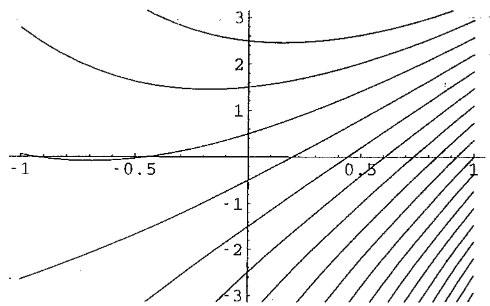
minst en lösning på något öppet intervall I som innehåller punkten $x = a$.

Om dessutom den partiella derivatan $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerlig i rektangeln, så är lösningen till begynnelsevärdesproblemet (17) entydigt bestämd.

Anmärkning. Geometriskt tolkat säger existensdelen av Sats 8 att det genom varje punkt (a,b) i rektangelns inre kan ritas grafen av någon lösning till $y' = f(x,y)$.

Å andra sidan följer det ur entydighetsdelen att graferna aldrig skär varandra (om f'_y är kontinuerlig på rektangeln). Alltså graferna till lösningarna täcker det inre av rektangeln utan att skära varandra.

Med $f(x,y) = x + \sin x + \cos x + e^x - y$, (vi löser denna DE senare), är f och $f'_y = -1$ kontinuerliga på rektangeln $[-1,1] \times [-\pi,\pi]$. En del av skaran som löser begynnelsevärdesproblemet (17) för (a,b) i rektangeln åskådliggörs i nedanstående figur:



Figur 4. Kurvskara i $[-1,1] \times [-\pi,\pi]$

Sats 8 är icke-konstruktiv, den berättar inte hur vi skall hitta lösningarna. Dessutom garanterar den endast att en lokal lösning existerar, dvs. lösning existerar i något, kanske mycket litet öppet intervall kring a.

1.4 Separabla differentialekvationer

En DE av 1:a ordningen är separabel, har separerbara variabler, om den kan skrivas i formen

$$g(y)\, y' = h(x), \tag{18}$$

där h och g är kontinuerliga i intervallen I respektive J.

Låt H och G vara primitiva funktioner till h respektive g, ($G'(y) = g(y)$ $\forall y \in J$ och $H'(x) = h(x)$ $\forall x \in I$). Antag att $y(x)$ är en deriverbar funktion i intervallet $I' \subseteq I$. Då gäller:

$$g(y(x))\, y'(x) = G'(y(x))\, y'(x) = \frac{d}{dx}\big(G(y(x))\big).$$

Därmed är y en lösning till (18) i I' om och endast om

$$\frac{d}{dx}\big(G(y(x))\big) = h(x),$$

vilket är ekvivalent med ~~att~~

$$G(y(x)) = H(x) + C, \tag{19}$$

där C är en reell konstant. Då ger (19) lösningarna till (18) i implicit form.

Om $g(y) \neq 0$ i ett intervall $J' \subseteq J$ så är $G'(y) = g(y) \neq 0$ och G är strängt monoton (växande eller avtagande) i J'. Då har G en invers i J'. Vi har då den explicita lösningen

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C) \tag{20}$$

till (18) lokalt för $y \in J'$

Definition 9. En enskild lösning $y(x)$ till en DE kallas en partikulärlösning till DE:en. En mängd S av lösningar till en DE utgör en fullständig lösning till DE:en om varje partikulärlösning ingår i mängden S. En allmän lösning till en DE är en lösning $y(x)$ som beror av ~~ett~~ antal parametrar $c_1, \ldots, c_n$, och som ger en fullständig lösning då parametrarna varierar. (Härvidlag kan vissa lösningar ges av "parametervärdet ∞").

Exempel 10. Lös DE:en $y' = -y^2 e^x$.

Vi observerar att $y(x) \equiv 0$ är en lösning. Antag att $y(x)$ är en lösning med $y(x) \neq 0$ för $x \in I$. Då kan vi skriva DE:en i formen

$$-\frac{1}{y^2} y' = e^x$$

och vi har $g(y) = -1/y^2$, $h(x) = e^x$, $G(y) = 1/y$ och $H(x) = e^x$. Då ges lösningen, enligt (19), i implicit form av

$$\frac{1}{y} = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Då $G^{-1}(y) = 1/y$ ges den explicita lösningen av

$$y = \frac{1}{e^x + C}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

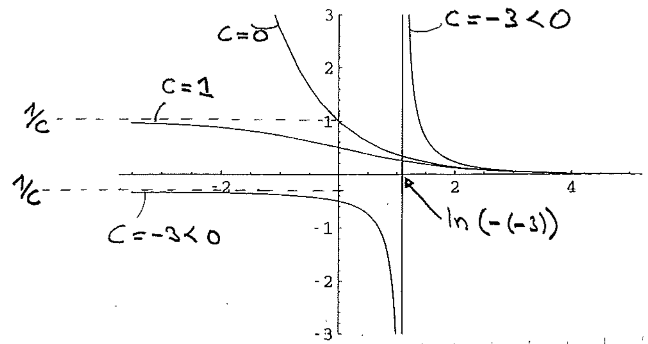
Den allmänna lösningen till DE:en ges av (21) med $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Lösningen $y(x) \equiv 0$ ges då av $C = \infty$.

I (21) ger varje $C \geq 0$ en partikulärlösning $y(x)$ definierad för $x \in (-\infty, \infty)$.

För $C < 0$ erhålls två partikulärlösningar, $y_1(x)$ i intervallet $(-\infty, \ln(-C))$ och $y_2(x)$ i intervallet $(\ln(-C), \infty)$. (Se figur).


```
In[1]:= f[x_, c_] := (Exp[x] + c)^(-1)

In[12]:= Plot[{f[x, 0], f[x, -3], f[x, 1]}, {x, -3.5, 5}, PlotRange -> {-3, 3}]
```



Figur 5. Partikulärlösningarna för $C = -3, 0, 1$.

Vi undersöker nu begynnelsevärdesproblemet

$$g(y)\,y' = h(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{22}$$

En lösningskurva i (19) går igenom punkten (x_0, y_0), $x_0 \in I$ och $y_0 \in J$, om och endast om

$$C = G(y_0) - H(x_0)$$

och (19) övergår då i likheten

$$G(y(x)) - G(y_0) = H(x) - H(x_0),$$

vilken kan skrivas i formen

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt = 0.$$

Sätter vi nu

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt,$$

Så är $F(x_0, y_0) = 0$ och $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = g(y_0)$.

Om nu $g(y(x_0)) = g(y_0) \neq 0$, så gäller enligt en sats för implicita funktioner, (se flerdimensionella analysen), att det finns en entydigt bestämd deriverbar funktion $y(x)$ sådan att $F(x, y(x)) = 0$ för alla x i en omgivning av x_0. Denna funktion $y(x)$ är då en lösning till begynnelsevärdesproblemet (22).

Exempel 11. Bestäm den lösning till DE:en

$$x^2 y y' = 1 + x^2$$

som går igenom punkten $(2, 2)$.

Exempel 12. Enligt Newtons avkylningslag är förändringen av en kropps temperatur $T(t)$ med avseende på tiden t proportionell mot skillnaden mellan omgivningens temperatur T_1 och $T(t)$. Alltså:

$$T' = k\,(T_1 - T), \qquad (23)$$

där k är en positiv konstant. Om kroppens temperatur vid $t=0$ är $T_0 > T_1$, vilken är den vid tiden t?

Lösning: (23) kan skrivas

$$\frac{1}{T-T_1}\cdot\frac{dT}{dt} = -k \iff \frac{1}{T-T_1}\,dT = -k\,dt$$

Integrering av båda leden ger:

$$\ln(T - T_1) = -kt + c_1 \iff \underline{T(t) = T_1 + C e^{-k\cdot t}},$$

där $C = e^{c_1}$. $T(0) = T_0 \iff T_0 = T_1 + C\cdot 1 \iff \underline{C = T_0 - T_1}$.

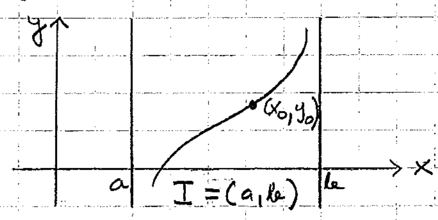
Svar: $T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,e^{-k\cdot t}$.

1.5 Linjära differentialekvationer

En linjär DE av första ordningen är av formen

$$y' + g(x)\cdot y = h(x), \qquad (24)$$

där $g(x)$ och $h(x)$ är kontinuerliga på ett intervall I på den reella axeln. Området V där lösningar sökes är då ett band $V = \{(x,y) : x \in I, y \in \mathbb{R}\}$.



Ekvationen (24) kan lösas explicit på följande sätt. Låt G vara en primitiv funktion till g på I. ($G'(x) = g(x)$ för alla $x \in I$).
Multiplicera (24) med den integrerande faktorn $e^{G(x)}$. Den nya ekvationen är ekvivalent med (24), ty $e^{G(x)} \neq 0$ på I, och kan skrivas på formen:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)} y(x)\right) = e^{G(x)} h(x). \qquad (25)$$

Låt $F(x)$ beteckna en primitiv funktion till högra ledet i (25). ($F'(x) = e^{G(x)}h(x)$ för $x \in I$). Då erhåller vi

$$e^{G(x)} y(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

och den allmänna lösningen till (24) ges då av

$$y(x) = e^{-G(x)}\left(F(x) + C\right) = e^{-\int g(x)dx}\left(\int \left(h(x)\, e^{\int g(x)dx}\right) dx + C\right), \qquad (26)$$

där $C \in \mathbb{R}$. (Att (26) ger en lösning för alla $C \in \mathbb{R}$ kontrolleras genom insättning i (24).)

Man bör inte memorera formel (26) utan istället lära sig lösningsmetoden:

1. Bestäm en integrerande faktor $\varrho(x) = e^{\int g(x)\,dx}$. (De integrerande faktorerna är bestämda upp till en multiplikativ konstant, ty om G_1, G_2 är primitiva funktioner till g så är $G_2 \equiv G_1 + a$, där a är konstant, och $e^{G_2} = e^{a} \cdot e^{G_1}$)
2. Multiplicera båda leden i (24) med $\varrho(x)$.
3. Notera att ekvationen kan skrivas i formen
$$\frac{d}{dx}(\varrho(x)y(x)) = \varrho(x)h(x).$$
4. Integrera båda leden och lös ut $y(x)$.

Exempel 13. Lös för $x > 1$ DE:en

$$y' + \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}y = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Låt nu (x_0, y_0) vara en given punkt med $x_0 \in I$. Vi väljer de primitiva funktionerna G och F som

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{och} \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} e^{G(t)}h(t)\,dt.$$

Då följer ur första likheten i (26) att lösningskurvan $y(x)$ går igenom (x_0, y_0) om och endast om

$$y_0 = y(x_0) = e^{-G(x_0)}(F(x_0) + C) = e^{-0}(0 + C) = C,$$

alltså omm $C = y_0$. Vi har därmed minst en lösning till begynnelsevärdesproblemet med $y(x_0) = y_0$.

Antag nu att

$$y_1(x) = e^{-G_1(x)}(F_1(x) + C_1)$$

är en lösning som går igenom (x_0, y_0). Då gäller för någon konstant a att $G_1(x) = G(x) + a$ för alla $x \in I$. Vidare är för alla $x \in I$

$$F_1'(x) = e^{G_1(x)}h(x) = e^{a}e^{G(x)}h(x) = e^{a}F'(x),$$

Så $F_1(x) = e^{a}F(x) + b$ för någon konstant b. Då är

$$y_1(x) = e^{-a}e^{-G(x)}(e^{a}F(x) + b + C_1)$$

och $y_1(x_0) = y_0$ om och endast om $C_1 = e^{a}y_0 - b$. Alltså gäller för alla $x \in I$ att

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-a}e^{-G(x)}(e^{a}F(x) + b + e^{a}y_0 - b) \\ &= e^{-G(x)}(F(x) + y_0) \\ &= y(x). \end{aligned}$$

Därmed går precis en lösningskurva igenom (x_0, y_0).

Sats 14. Om $g(x)$ och $h(x)$ är kontinuerliga funktioner på det öppna intervallet I som innehåller punkten x_0, så har begynnelsevärdesproblemet

$$y' + g(x)y = h(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{27}$$

en entydigt bestämd lösning $y(x)$ på I som kan skrivas i formen

$$y(x) = e^{-G(x)}(F(x) + y_0),$$

där

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{och} \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} e^{G(t)}h(t)\,dt.$$

Exempel 15. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 1.$$

Vi har att $g(x) = 2/x$ och $h(x) = \cos x / x^2$ är kontinuerliga då $x \neq 0$. Emedan $x_0 = \pi$ betraktar vi intervallet $I = (0, \infty)$.

Med stöd av Sats 14 väljer vi nu de primitiva funktionerna G och F enligt

$$\underline{\underline{G(x)}} = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = \int_{\pi}^{x} 2/t\,dt = 2\left[\ln t\right]_{\pi}^{x}$$

$$= 2(\ln x - \ln \pi) = \underline{\underline{2\ln(x/\pi)}}$$

och

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int_{x_0}^{x} e^{G(t)} h(t)\,dt = \int_{\pi}^{x} \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\sin t\right]_{\pi}^{x} = \underline{\underline{\sin x / \pi^2}}.$$

Då ges den entydiga lösningen av

$$\underline{y(x)} = e^{-G(x)}(F(x) + y_0) = \frac{\pi^2}{x^2}(\sin x/\pi^2 + 1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x^2}(\sin x + \pi^2), \quad x > 0.}}$$

1.6 Exakta differentialekvationer

Den allmänna lösningen $y = y(x)$ till en första ordningens DE är ofta implicit definierad i något öppet intervall I genom en ekvation av formen

$$F(x, y) = C, \tag{28}$$

där C är en konstant och F kont. med kontinuerliga partiella derivator av första ordningen.

Om $F(x_0, y_0) = C$ för $x_0 \in I$ och $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, så definierar (28) en kontinuerligt deriverbar funktion $y(x)$ i ett öppet intervall $I' \subseteq I$ med $x_0 \in I'$. För $x \in I'$ kan vi derivera (28) implicit och erhålla:

$$0 = \frac{d}{dx}\big(F(x, y(x))\big) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= M(x, y) + N(x, y)\, y'$$

där

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad \text{och} \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y). \tag{29}$$

Därmed satisfierar $y(x)$ för $x \in I'$ DE:en

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0. \tag{30}$$

<u>Definition 16.</u> En DE av formen (30) kallas <u>exakt</u> om det finns en kontinuerlig funktion $F(x,y)$ med kontinuerliga första ordningens derivator sådana att (29) gäller.

Antag nu att $y = y(x)$ är en kontinuerligt deriverbar lösning till (30) och att (29) gäller. Då är

$$0 = M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(F(x, y(x))\big)$$

och därmed är $F(x, y(x)) = C$ för någon konstant C, och $y(x)$ är en av de implicit definierade funktionerna i (28).

Sats 17. I en rektangel $V =]a,b[\times]c,d[$ där $N(x,y) \neq 0$ fås alla lösningar till den exakta DE:en (30) genom att ur (28) lösa ut variabeln y som funktion av x, $y = y(x)$.

Observera att varje 1:a ordningens DE $y' = f(x,y)$ kan skrivas på formen (30) med $N(x,y) = -1$ och $M(x,y) = f(x,y)$.

Nu inställer sig frågan: När är DE:en (30) exakt?

Vi ger först ett nödvändigt villkor. I FDA visas att

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

om båda dessa partiella derivator av andra ordning är kontinuerliga på en öppen mängd i xy-planet. Om DE:en (30) är exakt och M samt N har kontinuerliga partiella derivator så gäller med stöd av (29) att $\partial^2 F/\partial y \partial x$ och $\partial^2 F/\partial x \partial y$ är kontinuerliga och därmed är

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Alltså om (30) är en exakt DE så är

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{31}$$

Exempel 18. DE:en $y^2 + 3xy^2 y' = 0$ är inte exakt, ty

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Antag att M och N är kontinuerliga med kontinuerliga partiella derivator av första ordning på en rektangel $V =]a,b[\times]c,d[$. Vi skall visa att om (31) gäller, så kan vi hitta en funktion F sådan att $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Om vi definierar

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y), \tag{32}$$

där $g(y)$ är en godtyckligt vald deriverbar funktion av y, så gäller $\frac{\partial F}{\partial x} = M$. Vi önskar välja $g(y)$ så att

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y).$$

Med andra ord bör det gälla att

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \tag{33}$$

Vi kan hitta dylika funktioner $g(y)$ om högra ledet i (33) är oberoende av x. Partiell derivering med avseende på x av högra ledet i (33) ger

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int M(x,y)\,dx$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\int M(x,y)\,dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0$$

i rektangeln V. Därmed erhålls genom integrering av (33) den önskade funktionen $F(x,y)$,

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy, \tag{34}$$

som uppfyller $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N$.

Sats 19. Antag att $M(x,y)$ och $N(x,y)$ är kontinuerliga och har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen på rektangeln $V =]a,b[\times]c,d[$. Då är DE:en

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \tag{35}$$

exakt i V om och endast om

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{36}$$

i varje punkt i V, dvs. det existerar en funktion $F(x,y)$ kontinuerlig på V med $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ om och endast om (36) gäller på V.

Anmärkning. Beviset till Sats 19 är konstruktivt. Formel (34) ger receptet på $F(x,y)$.

Anmärkning 2. Varje separabel DE är exakt, ty om $f(x) - g(y)\,y' = 0$ så är $\frac{\partial}{\partial x}(-g(y)) \equiv 0 \equiv \frac{\partial}{\partial y} f(x)$.

Exempel 20. Lös DE:en $(x+y^2)\,y' = x^2 - y$.

Lösning: Skriv DE:en i formen $(y-x^2) + (x+y^2)\,y' = 0$. Beteckna: $M(x,y) = y - x^2$, $N(x,y) = x + y^2$. Då är

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 1 \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

så DE:en är exakt. Enligt (32) kan vi göra ansatsen

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$
$$= xy - \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Då gäller $\frac{\partial F}{\partial x} = M$. Vi bör nu bestämma $g(y)$

så att $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Vi erhåller:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N \iff x + g'(y) = x + y^2 \iff g'(y) = y^2.$$

Då kan vi välja $g(y) = y^3/3$. Den allmänna lösningen i implicit form till DE:en ges då av

$$F(x,y) = C \iff \underline{xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C},$$

där C är en konstant.

Anmärkning: Det är säkrare att lära sig lösningsmetoden i Exempel 20 än att försöka memorera formel (34).

Ibland kan en DE som inte är exakt göras exakt genom multiplikation med en *integrerande faktor*. Antag att DE:en

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0, \tag{37}$$

där M och N är kontinuerliga med kontinuerligt deriverbara partiella derivator av första ordning, *inte är exakt*.

Definition 21. En kontinuerlig funktion $\mu(x,y)$, med kontinuerliga partiella derivator av första ordning, är en *integrerande faktor* till DE:en (37) om

$$\mu(x,y)\,M(x,y) + \mu(x,y)\,N(x,y)\,y' = 0 \tag{38}$$

är en exakt DE, dvs. om

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \tag{39}$$

I allmänhet är det svårt att bestämma en integrerande faktor. Man får ofta prova med en "gissning".

<u>Exempel 22.</u> DE:en $x^2+y^2+y-xy'=0$, $x>0$, är inte exakt, ty

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y+1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Vi provar med $\mu(x,y) = 1/(x^2+y^2)$,

$$\mu M + \mu N y' = 0 \iff \left(1+\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)y' = 0.$$

Nu erhålls

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dots = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \quad \text{(kolla!)}$$

så <u>DE:en är exakt</u>. Notera att

$$(\mu M)(x,y) = 1 + \frac{y/x^2}{1+(y/x)^2},$$

så

$$F(x,y) = \int (\mu M)(x,y)\,dx + g(y) = x - \arctan(y/x) + g(y).$$

Vidare bör $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \mu N$, alltså

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1/x}{1+(y/x)^2} + g'(y) \equiv -\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{1/x}{1+(y/x)^2}.$$

Därmed är $g'(y) \equiv 0$ och vi väljer $g(y) \equiv 0$. Då erhålls lösningen till DE:en i implicit form:

$$F(x,y) = C \iff \underline{x - \arctan(y/x) = C},$$

där C är en konstant.

<u>Några tumregler</u> kan ges för bestämning av en integrerande faktor:

Om DE:en innehåller formen:	Prova med integrerande faktorn:
$y + xy'$	xy eller en fkt. av xy
$x + yy'$	x^2+y^2 eller fkt. av x^2+y^2
$y - xy'$	$1/x^2$ eller $1/y^2$ eller $1/(x^2+y^2)$ eller $1/x^2 \cdot f(y/x)$.

Om en DE $M + Ny' = 0$ har en integrerande faktor μ som <u>beror enbart av x eller y</u>, så kan μ bestämmas enkelt, vi har nämligen:

<u>Sats 23.</u> Betrakta den <u>icke-exakta</u> DE:en $M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$, där M och N är kontinuerliga med kontinuerliga partiella derivator av första ordning.

a) DE:en har en integrerande faktor $\mu = \mu(x)$ om och endast om

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{40}$$

är en funktion av x, $f = f(x)$. Då är

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}. \tag{41}$$

b) DE:en har en integrerande faktor $\mu = \mu(y)$ om och endast om

$$h = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{42}$$

är en funktion av y, $h = h(y)$. Då är

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy}. \tag{43}$$

Bevis. (a)-delen). 1° Antag att f i (40) är en funktion av x, $f = f(x)$. Sätt $\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$. Då är

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \mu \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Vidare är

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \mu'(x) N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} = f(x)\mu N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\overset{(40)}{=} \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial N}{\partial x} = \mu \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Alltså: $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ och DE:en har en integrerande faktor μ som beror enbart av x, $\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$.

2° Antag att DE:en har en integrerande faktor $\mu = \mu(x)$ (beroende enbart av x). Då är

$$\mu M + \mu N y' = 0$$

en exakt DE, dvs.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Då är

$$\mu(x) \frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x) N + \mu(x) \frac{\partial N}{\partial x},$$

alltså

$$\mu'(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(x),$$

och därmed är $f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ en funktion av x.
((b)-delen bevisas analogt). □

Exempel 24. Lös DE:en $y^2\cos x + (4 + 5y\sin x)y' = 0$.

Lösning: DE:en är inte exakt, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Vi bildar

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2y\cos x - 5y\cos x}{4 + 5y\sin x} = -\frac{3y\cos x}{4 + 5y\sin x},$$

dvs. f är inte en funktion av enbart x.

$$h = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{5y\cos x - 2y\cos x}{y^2\cos x} = \frac{3}{y},$$

varför $h = h(y)$, är en funktion av y. Sats 23 ger att

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy} = e^{3\ln y} = y^3$$

är en integrerande faktor. Vi erhåller den exakta DE:en $\mu M + \mu N y' = 0$, dvs.

$$y^5\cos x + (4y^3 + 5y^4\sin x)y' = 0.$$

Vi får då att

$$F(x,y) = \int y^5\cos x\,dx + g(y) = y^5\sin x + g(y).$$

Vidare ger kravet $\frac{\partial F}{\partial y} = \mu N$ ekvationen

$$5y^4\sin x + g'(y) = 4y^3 + 5y^4\sin x.$$

Alltså $g'(y) = 4y^3$ och vi kan då välja $g(y) = y^4$. Den allmänna lösningen i implicit form ges då av

$$F(x,y) = C \iff y^5\sin x + y^4 = C,$$

där C är en konstant.