

Numerisk analys

21.1.2004

1

Högersingulärvektorerna v_1 och v_2 fås genom att lösa egenvärdesekvationen

$$A^*Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2,$$

som har lösningen $\lambda_1 = 200, \lambda_2 = 50$ och egenvektorerna blir $v_1 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$. Singulärvärdesmatrisen blir

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vänstersingulärvektorerna blir $u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ och $u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Man kan multiplicera v_1 och v_2 med -1 och räkna om vänstersingulärvärdena, men då skulle antalet minustecken öka. $\|A\|_1 = 16, \|A\|_2 = 10\sqrt{2}, \|A\|_\infty = 15, \|A\|_F = 5\sqrt{10}$.

d) $A = U\Sigma V \Rightarrow A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^* = \dots = \begin{pmatrix} 1/20 & -11/100 \\ 1/10 & -1/50 \end{pmatrix}.$

e och f) $Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{391}$, och $\det(A) = 100 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. OK. Dessutom $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 100 = |\det A|$.

g) En ellips med längden σ_1 och σ_2 av huvudaxlarna har arean $A = \pi\sigma_1\sigma_2 = 100\pi$.

2

P är en ortogonal projektion om den uppfyller $P^2 = P$ och $P = P^*$. Vi vill visa att $I - 2P$ är unitär, dvs.

$$(I - 2P)^* = (I - 2P)^{-1}.$$

Det räcker med att studera $(I - 2P)^*(I - 2P)$:

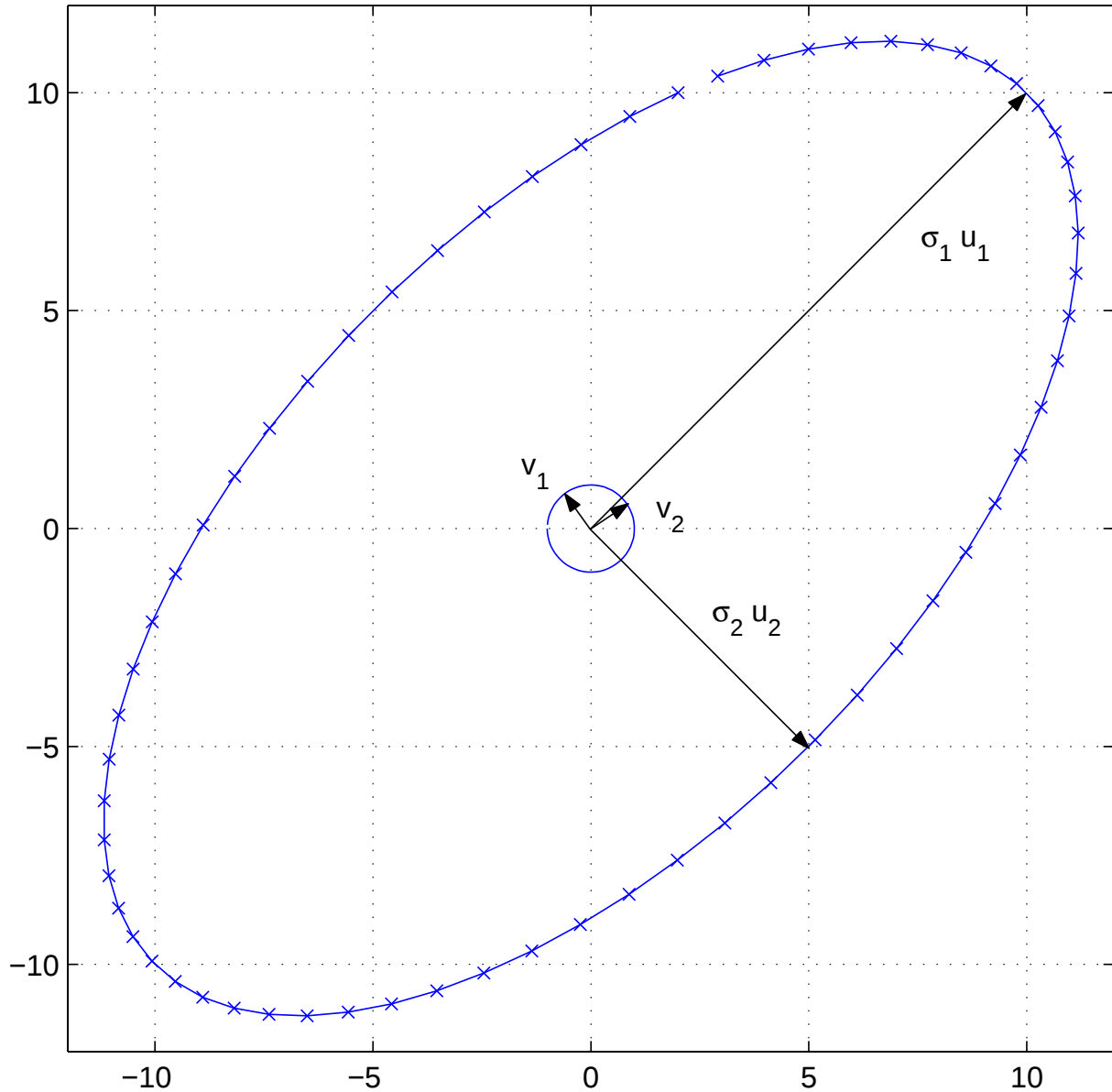
$$\begin{aligned} (I - 2P)^*(I - 2P) &= \\ (I - 2P^*)(I - 2P) &= \\ I - 2P - 2P^* + 4P^*P &= \\ I - 2P - 2P + 4P^2 &= \\ I - 2P - 2P + 4P &= I. \end{aligned}$$

$I - 2P$ är en spegling med avseende på P :s nollrum.

3

Låt $m \times m$ -matrisen F uppfylla $f_{i,(m-i+1)} = 1$ för $i = 1, \dots, m$, $f_{ij} = 0$ annars. Då blir $E = \frac{1}{2}(I + F)$.

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{4}(I + F)(I + F) \\ &= \frac{1}{4}(I + F + F + FF) \\ &= \frac{1}{4}(I + 2G + I) \\ &= \frac{1}{2}(I + F) = E. \end{aligned}$$



$\therefore E$ är en projektion. Dessutom $E^* = \frac{1}{2}(I + F)^* = \frac{1}{2}(I + F) = E$. $\therefore E$ är en rätvinklig projektion. Om

$$m = 4 \text{ blir } E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ om } m = 5 \text{ blir } E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4

a) A 's kolonner a_1, a_2 är färdigt ortogonala, de behöver bara normeras för att få q_1 och q_2 . I det här fallet

$$P = q_1 q_1^* + q_2 q_2^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ och } Pv = (2 \ 2 \ 2)^T.$$

b) Man ser lätt att B 's kolonner kan uttryckas som linjärkombination av vektorerna $k_1 = (1 \ 0 \ 1)^T$ och $k_2 = (1 \ 1 \ -1)^T$. Därför spänner k_1, k_2 upp matrisen B . Normeringen av k_1, k_2 ger $q_1 = (1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2})^T$ och $q_2 = (1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ -1/\sqrt{3})^T$. Således blir

$$P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}) + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ -1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 5/6 \end{pmatrix},$$

och $P'v = (2 \ 0 \ 2)^T$.

5A

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \hat{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5B

$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de "hattade" matriserna får man genom att lämna bort den sista kolonnen av Q och den sista raden av R .

6

Vi kan utgå ifrån ekvationerna (7.3) på sid. 49 i *Trefethen-Bau*. $a_2 \perp a_1$ medför att $r_{12} = 0$. $a_3 \perp a_2$ medför i sin tur att $r_{23} = 0$. $a_4 \perp a_3 \wedge a_4 \perp a_1$ medför att $r_{14} = r_{34} = 0$. Allmänt gäller att $r_{i,j} = 0$, om $i+j$ är udda. A:s jämna kolonner kommer alltså att uttryckas som en lineärkombination av de tidigare jämna kolonner, dvs. $\hat{R}$ (som ger koefficienterna till lineärkombinationen) blir en gles matris enligt

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \|a_1\| & 0 & r_{1,3} & 0 & \dots & 0 & r_{1,n} \\ 0 & \|a_2\| & 0 & r_{2,4} & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \ddots & \ddots & \ddots & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{4,4} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \ddots & r_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dessutom ska $\|r_j\|_2 = \|a_j\|_2, j = 1, \dots, n$.

7a,b

Påst. $\text{rang}(A) \geq k$,

där k betecknar antalet icke-noll diagonalelement.

Bevis

Vi vet enligt definition att i en reducerad QR-faktorisering $A = \hat{Q}\hat{R}$ har matrisen $\hat{Q}$ full rang, dvs $\text{range}(\hat{Q}) = \mathbb{C}^n$. Om den (enligt definition) uppåt triangulära matrisen $n \times n$ -matrisen $\hat{R}$ har ett diagonalelement olika noll, blir $\hat{R}$'s rang $n-1$. Det här kan konstateras genom att betrakta de tidigare kolonnernas linjärkombination. På samma sätt ($\hat{R}$ är triangulär!) kan man konstatera att rangen av A kan inte vara mindre än antalet diagonalelement som är olika noll.

$\therefore \text{rang}(A) \geq k$.

Det är lätt att visa att strikt olikhet kan gälla genom att konstruera ett exempel, där $\text{rang}(A) > k$. Till exempel matrisen med nollor i diagonalen och ettor i "superdiagonalen" som har rangen $n-1 > k$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore \text{rang}(A) \geq k$.