

Hemuppgifter till onsdagen den 21 januari

Exercises for Wednesday, January 21

English text, i. e., copies of the relevant pages, will be distributed with the lecture notes.

1. (Exercise 5.3., p. 37) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en reell SVD av A av formen $A = U\Sigma V^T$. Singulärvärdesuppdelningen är inte entydig, utan sök den med minimalt antal minustecken i U och V .

(b) Uppgör en förteckning på A :s singulärvärden samt vänstersingulärvektorerna och högersingulärvektorerna. Upprita noggrant en figur bestående av enhetsskivan i R^2 och (en annan figur med) dess bild under A . Utmärk singulärvektorerna i figurerna.

(c) Bestäm A :s 1-, 2- och ∞ -norm samt dess Frobeniusnorm.

(d) Sök A^{-1} indirekt, via SVD.

(e) Sök A :s egenvärden λ_1 och λ_2 .

(f) Verifiera att $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ och att $|\det A| = \sigma_1 \sigma_2$.

(g) Bestäm ytan av den ellipsoid som A avbildar enhetsskivan i R^2 på.

2. (Exercise 6.1., p. 47) Om P är en ortogonal projektion så är $I - 2P$ unitär. Bevisa detta algebraiskt och ge en geometrisk tolkning.

3. (Exercise 6.2., p. 47) Låt E vara den $m \times m$ matris som väljer ut den "jämna delen" av en m -vektor: $Ex = (x + Fx)/2$, där F är den $m \times m$ matris som kastar om $(x_1, x_2, \dots, x_m)^*$ till $(x_m, \dots, x_2, x_1)^*$. Är E en rätvinklig projektion, en sned projektion eller ingen projektion alls? Vilka är elementen i E ?

4. (Exercise 6.4., p. 47) Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm den ortogonala projektionen P på A :s värdemängd $R(A)$. Bestäm bilden av vektorn $(1, 2, 3)^*$ under P .

(b) Bestäm den ortogonala projektionen P' på B :s värdemängd $R(B)$. Bestäm bilden av vektorn $(1, 2, 3)^*$ under P' .

- 5.** (Exercise 7.1., p. 55) Betrakta igen matriserna A och B i föregående uppgift.
- (a) Bestäm en reducerad QR faktorisering $A = \hat{Q}\hat{R}$ och en fullständig QR faktorisering $A = QR$. (Metoden är valfri, men räkna för hand.)
- (b) Bestäm en reducerad QR faktorisering $B = \hat{Q}\hat{R}$ och en fullständig QR faktorisering $B = QR$.
- 6.** (Exercise 7.2., p. 55) Låt A vara en matris med egenskapen att kolonnerna $1, 3, 5, 7, \dots$ är ortogonala mot kolonnerna $2, 4, 6, 8, \dots$. Vilken speciell egenskap kommer $\hat{R}$ att ha i en reducerad QR faktorisering $A = \hat{Q}\hat{R}$?
- 7.** (Exercise 7.5., p. 55) Låt A vara en $m \times n$ matris ($m \geq n$) och $A = \hat{Q}\hat{R}$ en reducerad QR faktorisering.
- (a) Visa att A har full rang om och endast om alla diagonalelementen i $\hat{R}$ är olika noll.
- (b) Antag att $\hat{R}$ har k diagonalelement olika noll, $0 \leq k < n$. Vad betyder detta för A 's rang? Är $\text{rang}(A) = k$? Är $\text{rang}(A) \geq k$? Är $\text{rang}(A) \leq k$? Ge ett exakt svar på frågan, med bevis!