Räkneövningar i Matriser, v. 9, 2015

1. (a) Matrisen för T i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$ är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

koordinatvektorn för x i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$T(x) = -x \iff A\underline{X} = -\underline{X} \iff (A+I)\underline{X} = 0$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Bo2^+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Bo3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Bo5} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & S \end{array} \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}s \\ x_2 = -\frac{1}{3}s \\ x_3 = s \end{cases} \quad \therefore \underline{X} = \underbrace{\frac{s}{3}}_{=t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \underline{x = t(2a_1 - a_2 + 3a_3),\ t \in \mathbb{R}.}$$

(b) Undersöker om $\{b_1, b_2, b_3\}$ är linjärt oberoende:

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_1(a_1 - a_2 + 2a_3) + c_2(a_1 + 2a_2 - a_3) + c_3(2a_1 + a_2 + 2a_3) = 0$$

$$\Rightarrow (c_1 + c_2 + 2c_3)a_1 + (-c_1 + 2c_2 + c_3)a_2 + (2c_1 - c_2 + 2c_3)a_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{= C \\ \text{koefficientmatrisen}}} \xrightarrow{Bo1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Bo1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ #(fria variabler) $= 0$

$\therefore$ $\underline{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$. $\therefore$ linjärt oberoende

$\therefore$ $\{b_1, b_2, b_3\}$ är en bas i E.

1(c)) Basbytesmatrisen $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(C \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för T i basen $\{b_1, b_2, b_3\}$ är:

$$A' = C^{-1} A C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 10 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$