Svar till övningsuppgifterna

Kapitel 1

1. $u = 3/2$, $v = -1/2$, $w = -3$.
2. $x_1 = \frac{1}{2}(-1 - s + t)$, $x_2 = 4 - t$, $x_3 = -1$, $x_4 = s$, $x_5 = 4 - t$, $x_6 = t$ ($x_4 = s$ och $x_6 = t$ är fria).
3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + {}} x_4 = 1\,. \end{cases}$$
4. $x_1 = 19 + 2s$, $x_2 = -2 - 2s$, $x_3 = s$, $x_4 = s$ ($x_4 = s$ är en fri variabel).
5. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$, $x_6 = -2$.
6. 22 000 fiskar i A, 1 000 fiskar i B.
7. I A finns dubbelt så många fiskar som i B.
8. Om x_1, x_2 och x_3 är antalet bakterier av typ 1, 2 respektive 3 som kan leva i tuben så gäller
$$x_2 = 15\,000 - 2s\,, \quad 0 \le x_3 = s \le 7\,500\,.$$
9. För $a \neq 3,\ -1$ är lösningen entydig:
$$x = -\frac{2}{a+1}\,, \quad y = \frac{a-1}{a+1}\,.$$
För $a = 3$ är $x = 1 - 3s$, $y = s$ ($y = s$ är fri). Det finns oändligt många lösningar. För $a = -1$ är systemet inkonsistent, dvs. lösningar saknas.
10. För $a = 0$ eller $a = -1$.
11. $a = 5$, $b = -3$, $c = -7$.
12. 7 000, 14 000 och 3 000 euro.

Kapitel 2

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$
2. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. $X = \begin{pmatrix} (5-5s)/2 & (3-5t)/2 \\ (-1+s)/2 & (1+3t)/6 \\ s & t \end{pmatrix}\,, \quad s$ och t är fria variabler.

4. $\begin{cases} x_{n+1} = 0,96x_n + 0,02y_n + 50 \\ y_{n+1} = 0,03x_n + 0,97y_n + 450 \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,02 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 450 \end{pmatrix}$.

5. $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} -s+t & s \\ s & t \end{pmatrix} \mid s,\, t \in \mathbf{R} \right\}$.

7. Exempel: Om A är en 3/2-matris så är A^T en 2/3-matris. Matriserna A^TA och AA^T är då av olika typ och kan inte vara lika. $A - A^T$ behöver inte vara symmetrisk.

11. $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $a = 10/7$, $b = 9/7$, $c = 4/7$ och $d = 5/7$.

17. Proportionerna mellan mjölk, soja och vassla (mätt i g/hg) bör vara ungefär 272 : 395 : 235.

20. I t.ex. fall (c) får man, om man räknar upp grundämnena i ordningen Na, H, C, O, ekvationen

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

[Lösning: $(\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \,)^T = (t/3)\,(\, 3 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \,)^T$. Heltalslösningar fås t.ex. då $t = 3$.] I fallen (a) och (b) ställs ekvationen upp på liknanade sätt.

21. Förhållandet mellan priserna per tidsenhet för produktionen inom sektorerna (K), (E) och (M) bör vara 17 : 11 : 12.

23. (a) $T_1 = 45/2\,°C$, $T_2 = 30\,°C$, $T_3 = 20\,°C$ och $T_4 = 55/2\,°C$.
(b) $T_1 = T_4 = 120/7\,°C$, $T_2 = T_5 = 150/7\,°C$ och $T_3 = T_6 = 190/7\,°C$.

Kapitel 3

1. Om (j) och $[j]$ betecknar rad j respektive kolonn j:

$$(a) \quad \begin{array}{ll} E_{31}: & (3) \to (3) + 4\,(1) \\ E_{23}: & (2) \to (2) + 5\,(3) \end{array}, \qquad (b) \quad \begin{array}{ll} E_{31}: & [1] \to [1] + 4\,[3] \\ E_{23}: & [3] \to [3] + 5\,[2] \end{array}.$$

2. $$\begin{cases} u - 2v + 3w = 11 \\ 4u + v - w = 4 \\ 2u - v + 3w = 10\,. \end{cases}$$

3. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, ur vilket man löser ut $U\mathbf{x}$ och finner ett värde $\mathbf{c}$. Sedan löser man ut $\mathbf{x}$ ur $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Lösningen blir $\mathbf{x} = (\, 4 \quad 2 \quad 3 \,)^T$.

4. Matriserna P_{ij} och P_{kl} kommuterar då $\{i, j\} = \{k, l\}$ samt då $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.

5. (a) $3!$, (b) $n!$.

6. $$\begin{cases} (a) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 3/2 & -1 \\ & & 4/3 \end{pmatrix}, \\ (b) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & -4 & 5 \\ & & 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

7. Radbyte krävs om och endast om $a = 4$ och $b \neq 0$ (A är då icke-singulär). Matrisen A är singulär om och endast om $2ab - 6a - 3b + 24 = 0$.

8. $PA = LDU$ t.ex. då

$$(a) \quad P = P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (b) \text{ och } (c) \quad P = P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

varvid

$$(a) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & -5 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 3/2 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

9. T.ex. för $P = P_{23}$, varvid

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 0 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ & 1 & 3 & -3/2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.

12. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (b) Matrisen är singulär.

13. $C^{-1}BA^{-1}$. Ja. $A + B$ behöver inte vara inverterbar.

14. (a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. De 2/2-matriser som är sina egna inverser, är

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, \quad bc \leq 1.$$

16. $a = 3$, $a = 1/2$.

17. Vänsterinverserna till A är $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s & 1-5s & 2s \\ -1+t & 1-5t & 2t \end{pmatrix}$, där s och t är fria.

18. $A = LDL^T$, där (a) $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

24. (a) $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $A = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

27. (a) LU-faktoriseringen är

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ & 2/7 & 1 & \\ & & 7/26 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 7/2 & 1 & \\ & & 26/7 & 1 \\ & & & 45/26 \end{pmatrix}.$$

(b) Den kubiska ri-funktionen är

$$f(x) = \begin{cases} 1 + (11t/4) - (3t^3/4), & \text{där } x = t \in [0,1] \\ 3 + (t/2) - (9t^2/4) + (3t^3/4), & \text{där } x = 1 + t \in [1,2]. \end{cases}$$

Kapitel 4

2. (a), (c) och (d).

3. (b) och (c).

5. $(\, t_1 \quad t_2 \,) = (\, 2 \quad 0 \,)$.

7. (a) Linjärt beroende. (b) Linjärt beroende.

9. Snittet av de två underrummen är mängen av alla diagonalmatriser av typ n/n.

10. $R(A) = \operatorname{spn}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $N(A) = \operatorname{spn}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $R(B) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $N(B) = \mathbf{R}^3$.

11. (a) Echelonform för A är $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. I ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = (\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \,)^T$, är x_2 en basvariabel medan x_1, x_2 och x_4 är fria variabler.

$$N(A) = \operatorname{spn}\left\{(\, 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,)^T, (\, 0 \quad -4 \quad 1 \quad 0 \,)^T, (\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,)^T\right\}.$$

Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = (\,b_1 \quad b_2\,)^T$ är konsistent om och endast en $2b_1 = b_2$ och härvid är lösningen

$$\mathbf{x} = b_1\,(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\,)^T + s\,(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,)^T + t\,(0 \quad -4 \quad 1 \quad 0\,)^T + u\,(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,)^T.$$

(b) Echelonform är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. I ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad x_2\,)^T$, är x_1 basvariabel och x_2 fri variabel. $N(A) = \operatorname{spn}\left\{(\,-2 \quad 1\,)^T\right\}$. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = (\,b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4\,)^T$ är konsistent om och endast om $b_1 = b_4 = 0$, $b_3 = 4b_2$ och då är lösningen $\mathbf{x} = b_2\,(1 \quad 0\,)^T + s\,(\,-2 \quad 1\,)^T$.

12. U och W är underrum, V och Z är inte underrum.

15. Linjärt beroende. En linjärkombination av vektorerna med t.ex. koefficienterna -1, 1, -1 och 1 blir noll.

16. (a) $\begin{cases} \text{Bas i } R(A)\text{:} \quad \{(1 \quad -1 \quad 5)^T, (-4 \quad 2 \quad -6)^T\}; \\ \text{Bas i } R(A^T)\text{:} \quad \{(1 \quad -4 \quad 9 \quad -7), (0 \quad -2 \quad 5 \quad -6)\}; \\ \text{Bas i } N(A)\text{:} \quad \{(2 \quad 5 \quad 2 \quad 0)^T, (-5 \quad -3 \quad 0 \quad 1)^T\}. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \text{Bas i } R(A)\text{:} \quad \{(-2 \quad 1 \quad 3 \quad 1)^T, (-5 \quad 3 \quad 11 \quad 7)^T, (0 \quad 1 \quad 7 \quad 5)^T\}; \\ \text{Bas i } R(A^T)\text{:} \quad \{(1 \quad 3 \quad -5 \quad 1 \quad 5), (0 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -7), \\ \qquad\qquad\qquad (0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad 20)\}; \\ \text{Bas i } N(A)\text{:} \quad \{(-1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T, (-1 \quad -3 \quad 0 \quad 5 \quad 1)^T\}. \end{cases}$

17. $\underline{a \neq 1}$: $\dim R(A) = 3$, $\dim N(A) = 1$.

$$\begin{aligned} &\text{Bas i } R(A): \quad \{(1 \quad 2 \quad 5)^T, (3 \quad 0 \quad 3)^T, (2 \quad a \quad 4)^T\}, \\ &\text{Bas i } N(A): \quad \{(1 \quad -1 \quad 0 \quad 2)^T\}, \end{aligned}$$

$\underline{a = 1}$: $\dim R(A) = 2$, $\dim N(A) = 2$.

$$\begin{aligned} &\text{Bas i } R(A): \quad \{(1 \quad 2 \quad 5)^T, (3 \quad 0 \quad 3)^T\}, \\ &\text{Bas i } N(A): \quad \{(-1 \quad -1 \quad 2 \quad 0)^T, (1 \quad -1 \quad 0 \quad 2)^T\}. \end{aligned}$$

18. $\begin{cases} (a)\ \text{T.ex. } \{(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0), (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1), (-1 \quad 0 \quad 2 \quad 1). \\ (b)\ \text{De fyra vektorerna är linjärt oberoende.} \\ (c)\ \text{T.ex. } \{(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1), (-1 \quad 1 \quad -1 \quad -1)\}. \end{cases}$

19. Nej.

21. $\begin{cases} (a) & \text{Linjärt oberoende. Bas i } \mathbf{R}^3. \\ (b) & \text{Linjärt beroende.} \\ (c) & \text{Linjärt oberoende. Ingen bas.} \\ (d) & \text{Linjärt beroende.} \\ (e) & \text{Linjärt beroende.} \end{cases}$

23. Linjärt oberoende.

24. $\begin{cases} (a) & \text{En bas i underrummet är } \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\text{. Dimensionen är 2.} \\ (b) & \text{En bas i underrummet är } \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right\}\text{. Dimensionen är 2.} \\ & \text{Koordinaterna för den givna matrisen är 2 och } -3. \\ (c) & \text{En bas i underrummet är } \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}\text{. Dimensionen är 2.} \end{cases}$

25. Matrisen måste vara kvadratisk, dvs. av typen n/n.

26. (a) Falsk! T.ex. vektorerna $(1\ \ 0\ \ 0)$, $(0\ \ 1\ \ 0)$ och $(1\ \ 1\ \ 0)$ spänner upp xy-planet i $\mathbf{R}^3$, som ändå har dimensionen 2.
 (b) Sann!
 (c) Falsk! T.ex. är $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Implikationen stämmer bara om A är icke-singulär.

27. Underrummets dimension är 6 och **en** bas består av matriserna

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

31. (a) Koordinaterna är 0, -1 och 1.
 (b) Koordinaterna för p i basen C är 1, -2 och 2. Koordinaterna för q i basen B är 8, 7 och 5.
 (c) Polynomet $p(x) = 3$ har de angivna koordinaterna.

32. $E = \begin{pmatrix}I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}$, $E^{-1} = \begin{pmatrix}I & 0\\ CA^{-1} & I\end{pmatrix}$.

33. Inversen är $\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix}$.

34. Koordinaterna är $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, $x_3 - x_4$ och x_4.

35. De baser som uppfyller villkoret har formen $\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3-3s\\7-3t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\right\}$, där s och t uppfyller $7s \neq 3t$. **En** bas är t.ex. $\{\frac{1}{2}(0\ \ 7)^T, (1\ \ 0)^T\}$.

36. En bas för $V + W$ är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\}$ och en bas för $V \cap W$ är $\{(0\ \ -1\ \ 1\ \ 0)^T\}$.

39. Vi har t.ex. följande baser:

 Bas i V: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0), (0\ \ -1\ \ 1\ \ 0), (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\}$.
 Bas i W: $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0), (0\ \ 0\ \ 2\ \ 1)\}$.
 Bas i $V \cap W$: $\{(3\ \ -3\ \ 2\ \ 1)\}$.
 Bas i $V + W = \mathbf{R}^3$: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\}$.

 Alltså är $\dim V = 3$, $\dim W = 2$, $\dim V \cap W = 1$ och $\dim(V + W) = 3$.

40. Mängden $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är ingen bas i U. Däremot är t.ex. $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, (0\ \ 0\ \ -1\ \ 1)\}$ det.

41. En bas är t.ex. $\{(2\ \ 3\ \ 4), (0\ \ 1\ \ 1)\}$.

42. Ja, eftersom matrisens rang är 3, vilket också är antalet rader.
43. Det finns högerinverser och de är alla av formen $(1-s \quad s \quad t)^T$, där s och t är fria variabler. Vänsterinvers saknas.
44. $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad -1)$ och $B = \mathbf{w}\mathbf{z}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 2)$.

Kapitel 5

1. (a) $\sqrt{61}$; (b) $t(21\,\mathbf{a} + \mathbf{b})$, där t är godtyckligt.
2. $a = 2 \pm \sqrt{3}$.
3. $2\pi/3$.
4. $\mathbf{v} = \pm\frac{1}{5}(3 \quad 4 \quad 0)^T$.
9. (a) $M_1 \perp M_2$ och $M_2 \perp M_4$; (b) M_2 och M_4 är varandras ortogonala komplement.
11. Alla vektorer av formen $t\,(1 \quad 1 \quad -2)$, $t \in \mathbf{R}$. För att ett ON-system skall uppstå, krävs bl.a. att $t \neq 0$.
14. Ja, $k = 5$ och $k = -4$. Mot $k = 5$ svarar $(a \quad b \quad c)^T = s\,(2 \quad 1 \quad 3)^T$ och mot $k = -4$ svarar $(a \quad b \quad c)^T = s\,(-5 \quad 2 \quad 6)^T$, $s \in \mathbf{R}$.
15. T.ex. matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
16. (a) En bas i $W^\perp$ är

$$\{(-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, (13 \quad 0 \quad -4 \quad 1 \quad 0)^T, (-17 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad 1)^T\}.$$

(b) En bas i $U^\perp$ är $\{(-1 \quad 1 \quad 0)^T, (2 \quad 0 \quad 1)^T\}$ och $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1 = \frac{3}{2}(1 \quad 1 \quad -2)^T \in U$ och $\mathbf{x}_2 = -\frac{1}{2}(5 \quad 3 \quad 4)^T \in U^\perp$.
17. (b) $\mathbf{x} = (2 \quad 3 \quad 1 \quad 1)$.
19. Man kan välja $W = V^\perp = \operatorname{spn}\Big\{(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T, (-2 \quad 1 \quad 0 \quad 1)^T\Big\}$.

Kapitel 6

1. (a) -2 och 0. (b) $\det(A) = 20$.
3. (a) $\det(A) = 0$; (b) $\det(U) = 16$; (c) $\det(U^T) = 16$; (d) $\det(U^{-1}) = 1/16$; (e) $\det(M) = 16$.
4. (b) För alla 2/2-matriser A, för vilka $\det(A) = 0$.
5. $(x-y)(y-z)(z-x)$.
6. $(n-1)(-1)^{n-1}$.
8. (a) 12, (b) 39, (c) -36.
11. -1.
12. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
13. $x = 3$, $y = -1$, $z = -2$.

17. $\det(A)=0$ om $n\geq 3$, $\det(A)=-1$ då $n=2$, $\det(A)=-1$ då $n=1$.
18. (a) Matrisen A är inte inverterbar för $k=1$ eller $k=-3$.
    (b) Matrisen B är inte inverterbar för $k=4$, $k=-2$ eller $k=3$.

Kapitel 7

1. (a) $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer är $s\,(3\quad 7)^T$ respektive $s\,(-1\quad 1)^T$ $(s\neq 0)$;
   (b) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -7$. Motsvarande egenvektorer är $s\,(3\quad 1)^T$ respektive $s\,(-1\quad 3)^T$ $(s\neq 0)$;
   (c) $\lambda_1=5$ med egenvektorerna $s\,(1\quad 1\quad 1)^T$ $(s\neq 0)$ samt $\lambda_2=2$ med egenvektorerna $s\,(-1\quad 1\quad 0)^T+t\,(-1\quad 0\quad 1)^T$ $(s\neq 0$ eller $t\neq 0)$.
2. (a) $\begin{cases}\lambda_1=12. & \text{Bas i } V(12)\text{: } \{(3\quad 5)^T\}.\\ \lambda_2=-4. & \text{Bas i } V(-4)\text{: } \{(-1\quad 1)^T\}.\end{cases}$

   (b) $\begin{cases}\lambda_1=10. & \text{Bas i } V(10)\text{: } \{(-1\quad 2)^T\}.\\ \lambda_2=5. & \text{Bas i } V(5)\text{: } \{(2\quad 1)^T\}.\end{cases}$

   (c) $\begin{cases}\lambda_1=5. & \text{Bas i } V(5)\text{: } \{(0\quad -1\quad 1)^T\}.\\ \lambda_2=3. & \text{Bas i } V(3)\text{: } \{(0\quad 1\quad 0)^T, (-1\quad 0\quad 1)^T\}.\end{cases}$

   (d) $\begin{cases}\lambda_1=3. & \text{Bas i } V(3)\text{: } \{(0\quad 1\quad 2)^T\}.\\ \lambda_2=2. & \text{Bas i } V(2)\text{: } \{(2\quad 1\quad 1)^T\}.\\ \lambda_3=-1. & \text{Bas i } V(-1)\text{: } \{(-1\quad 0\quad 1)^T\}.\end{cases}$
3. (a) $\begin{cases}\lambda_1=2^{62}. & \text{Bas i } V(2^{62})\text{: } \{(-1\quad 1\quad 0)^T\}.\\ \lambda_2=1. & \text{Bas i } V(1)\text{: } \{(1\quad -1\quad 1)^T, (0\quad -1\quad 1)^T\}.\end{cases}$

   (b) $\begin{cases}\lambda_1=4^{62}. & \text{Bas i } V(4^{62})\text{: } \{(0\quad 1\quad 1)^T\}.\\ \lambda_2=2^{62}. & \text{Bas i } V(2^{62})\text{: } \{(1\quad 1\quad 1)^T, (1\quad 1\quad 0)^T\}.\end{cases}$
5. $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

Kapitel 8

1. En ON-bas i planet är t.ex. $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 1\quad 0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\quad 1\quad 2)^T\}$. Projektionsmatrisen är
$$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
2. (a) $\mathbf{p}_1=\frac{10}{3}(1\quad 1\quad 1)^T$. (b) $\mathbf{p}_2=\frac{5}{9}(1\quad 2\quad 2)^T$.
3. (a) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}=\mathbf{b}=(1\quad 3\quad 4)^T$ ($\mathbf{b}$ ligger i A:s kolonnrum!).

   (b) $\mathbf{x}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}=\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}16/3\\-3/2\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}23\\14\\5\end{pmatrix}$.
5. (a) $\mathbf{p}_1=\frac{1}{3}(4\quad 4\quad -2)^T$, $\mathbf{p}_2=\frac{1}{3}(-2\quad 4\quad 4)^T$. Projektionen på $\operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ är $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\frac{2}{3}(1\quad 4\quad 1)^T$.

(*b*) $\mathbf{p}_3 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T$.

6. Bas för $N(A)$ är $\{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T\}$. Vidare är $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$. Koordinaterna för $\mathbf{x}_1$ i den angivna basen är 0 och 1.

7. (*a*) $$A = 1\,P_1 + 5\,P_2 = 1 \cdot \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = P_1 + 5^n P_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n+1 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n+1 \end{pmatrix}. \quad A^{1/3} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{5}+1 & \sqrt[3]{5}-1 \\ \sqrt[3]{5}-1 & \sqrt[3]{5}+1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) $$A = 1\,P_1 + (-2)P_2 = 1 \cdot \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = P_1 + (-2)^n P_2 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^n & -1+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1+(-2)^n & 2+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1+(-2)^n & -1+(-2)^n & 2+(-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$A^{1/3} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -1-\sqrt[3]{2} & -1-\sqrt[3]{2} \\ -1-\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} & -1-\sqrt[3]{2} \\ -1-\sqrt[3]{2} & -1-\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

9. Avståndet är $|\mathbf{n}^T\mathbf{y} - b\,| \,/\, \|\mathbf{n}\|$.

10. (*a*) $A = QR$, där $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(*b*) $A = QR$, där $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -7/3 \\ 0 & 3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$.

11. (*a*) *ON*-bas: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T\right\}$.

(*b*) Projektionsmatrisen är $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(*c*) Speglingen av $\mathbf{x}$ är vektorn $S\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+y-2z \\ x+2y+2z \\ -2x+2y-z \end{pmatrix}$.

13. Volymen är 27.

Kapitel 9

1. (*a*) Diagonaliserbar. (*b*) och (*c*) Inte diagonaliserbara.

2. $B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, om $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Härvid är

$A^n = BD^nB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$. En kvadratrot är $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. $Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, om $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

4. $Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, om $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Härvid är $A^n = QD^nQ^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$.

5. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (a) $\quad A = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ f_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & \cdots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) A har egenvärdet 1 samt två egenvärden, vilkas belopp ligger mellan 0 och 1. En konstant åldersfördelning är alltså möjlig. En liten störning i betingelserna kan emellertid göra att alla egenvärden blir till beloppet mindre än 1. Om detta händer riskerar arten dö ut.

7. Mor Stava är glad 2/3 av sina levnadsdagar.

Kapitel 10

3. (a) Ja. (b) Nej. (c) Ja.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{x} = t\,(3 \quad 3 \quad -1)^T, \quad t \in \mathbf{R}$.

6. (b) $\begin{pmatrix} 9/2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{b}_1' = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_2' = -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$.

9. $\begin{cases} (a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = 2x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3 = -3x_1' + x_3'\,. \end{cases}$

11. Koordinaterna 3, 1 och 0. Koordinaterna 9, -14 och 7.

12. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. (a) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.