9. Diagonalisering

Låt A vara en given n/n-matris. Vi ställer oss som uppgift att finna en inverterbar matris B, sådan att

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

är en diagonalmatris.

Definition 9.1. En matris B, som den i (1), sägs *diagonalisera* A. Matrisen A sägs vara *diagonaliserbar* om det existerar en matris B som diagonaliserar A.

För att få ett grepp om hur matrisen B skall konstrueras, antar vi att vi redan har hittat en matris B sådan att (1) gäller och undersöker hur B då måste se ut:

Genom att multiplicera med B från vänster skriver vi om (1) i formen $AB = BD$. Sedan sätter vi $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_n\,)$ och får

$$\begin{aligned} AB = BD \quad &\Longleftrightarrow \quad A(\,\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_n\,) = (\,\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_n\,)D \\ &\Longleftrightarrow \quad (\,A\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad A\mathbf{b}_n\,) = (\,\lambda_1\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \lambda_n\mathbf{b}_n\,) \\ &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

Av detta ser vi att diagonalelementen λ_i i D kommer att vara egenvärden till A och att kolonnerna $\mathbf{b}_i$ i B är motsvarande egenvektorer till A. Eftersom matrisen B dessutom måste vara inverterbar (dvs. icke-singulär), så måste egenvektorerna $\mathbf{b}_i$ väljas så att att de är linjärt oberoende.

Vi sammanfattar:

Sats 9.1. *En n/n-matris A är diagonaliserbar om och endast om det finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ till A. Den matris $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_n\,)$, som har dessa egenvektorer som kolonner, är en matris som diagonaliserar A:*

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A uppträder i D:s diagonal i en ordning som svarar mot egenvektorernas ordning i B.

Anmärkning. Om A:s alla egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är **olika** så finns det n stycken linjärt oberoende egenvektorer till A. Matrisen A är alltså diagonaliserbar i detta fall. Om A är **symmetrisk** så finns det också alltid n linjärt oberoende egenvektorer (också då vissa egenvärden är lika). Alla symmetriska matriser är således diagonaliserbara.

Exempel 9.1. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $(2-\lambda)^2 - 4 = 0$, vilket ger egenvärdena 0 och 4. Efter en enkel kalkyl finner vi baser $\{\mathbf{b}_1\}$ respektive $\{\mathbf{b}_2\}$ i $V(0)$ respektive $V(4)$, där $\mathbf{b}_1 = (\,-1 \quad 2\,)^T$ och $\mathbf{b}_2 = (\,1 \quad 2\,)^T$. På grund av Sats 9.1 vet vi att matrisen $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\,)$ är en matris som diagonaliserar A, så att

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observera att vi inte behöver utföra matrismultiplikationerna i vänstra ledet för att få fram D utan vi skriver bara ut A:s egenvärden i D:s diagonal i samma ordning som vi har placerat egenvektorerna i B. För kontrollens skull kan man emellertid utföra multiplikationerna i $AB = BD$ för att upptäcka om man gjort räknefel.

En annan matris som diagonaliserar A är t.ex. $B_1 = (\,2\mathbf{b}_1 \quad 3\mathbf{b}_2\,)$, eftersom $2\mathbf{b}_1$ och $3\mathbf{b}_2$ är två linjärt oberoende egenvektorer till A.

Det finns matriser som inte kan diagonaliseras. Vi ger ett exempel på en sådan:

Exempel 9.2. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har det enda egenvärdet 0 och vektorn $\mathbf{b} = (\,1 \quad 0\,)^T$ bildar en bas i egenrummet $V(0)$. Alla egenvektorer till A är alltså multipler av $\mathbf{b}$. Därför finns det bara **en** linjärt oberoende egenvektor till A. Men vi skulle ju behöva **två** för att kunna skriva ut en inverterbar matris B som diagonaliserar A. Således är matrisen A inte diagonaliserbar.

Det som vi hittills har sagt om diagonalisering gäller för alla matriser men om matrisen är symmetrisk kan vi till och med visa att diagonaliseringen alltid kan göras med hjälp av en ortogonal matris:

Sats 9.2. *Om A är en symmetrisk n/n-matris så existerar det en ortogonal matris Q* (varvid $Q^{-1} = Q^T$), *sådan att*

$$Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är A:s egenvärden.

Bevis. I varje egenrum räknar man ut en bas, som sedan ortonormeras med hjälp av Gram–Schmidt-proceduren till ett ON-system (se exempel 8.8). Unionen av dessa baser i egenrummen bildar sedan en ON-bas $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ i $\mathbf{R}^n$, eftersom egenrummen i detta fall färdigt är parvis ortogonala. Sätt $Q = (\,\mathbf{q}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{q}_n\,)$. Då är Q en ortogonal matris, som enligt Sats 9.1 diagonaliserar A. $\diamondsuit$

Exempel 9.3. Den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena -2 och 1. Genom att lösa ekvationen $(A + 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hittar vi basvektorerna

$$\mathbf{a}_1 = (\,-1 \quad 1 \quad 0\,)^T \quad \text{och} \quad \mathbf{a}_2 = (\,-1 \quad 0 \quad 1\,)^T$$

i egenrummet $V(-2)$. Dessa ortonormerar vi med hjälp av Gram–Schmidt-proceduren till två ortogonala enhetsvektorer

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,-1 \quad 1 \quad 0\,)^T, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\,-1 \quad -1 \quad 2\,)^T .$$

I egenrummet $V(1)$ hittar vi på liknande sätt en enda basvektor $\mathbf{a}_3 = (\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T$, som vi normerar till en enhetsvektor

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T$$

(steg 2 i Gram–Schmidt-proceduren!). Om vi nu sätter

$$Q = (\,\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3\,) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

så är Q en ortogonal matris som diagonaliserar A:

$$Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

På grund av att m:te potenser av en diagonalmatris D fås genom att diagonalelementen i D upphöjs till potensen m, kan en diagonalisering $B^{-1}AB = D$ av A användas till att på ett enkelt sätt räkna ut potenser (och funktioner) av A:

$$\begin{aligned} A &= BDB^{-1} \\ A^2 &= BDB^{-1}BDB^{-1} = BD^2B^{-1} \\ &- - - - \\ A^m &= BD^mB^{-1}. \end{aligned}$$

Ur detta följer att om $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ är ett polynom och om vi sätter $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$, så är

$$p(A) = Bp(D)B^{-1} = B \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Exempel 9.4. För t.ex. den matris som vi diagonaliserade i exempel 1 i detta avsnitt, är

$$p(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) & 0 \\ 0 & p(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) & 0 \\ 0 & p(4) \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

för varje polynom p.

Övningsuppgifter

1. Avgör om följande matriser är diagonaliserbara:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (c) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Räkna ut A^n genom att först diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också en kvadratrot ur A, dvs. en matris X sådan att $X^2 = A$.

3. Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av en ortogonal matris.

4. Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad (b \neq 0),$$

med hjälp av en ortogonal matris samt räkna ut matrisen A^n.

5. Bestäm en 2/2-matris A med 2 och -3 som egenvärden och $(-1 \quad 2)^T$ respektive $(1 \quad 1)^T$ som motsvarande egenvektorer.

6. I en djurpopulation lever en individ högst n år. Vi låter $x_i^{(k)}$ beteckna antalet honor med åldern i år k ($k \geq 0$). Vidare låter vi f_i beteckna den bråkdel av honorna med åldern i som överlever till nästa år och b_i må beteckna medelantalet ungar av honkön som en hona med åldern i föder ett visst år. Med $\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_0^{(k)} \ldots x_n^{(k)}\right)^T$ betecknar vi *åldersfördelningsvektorn* år k. (a) Skriv ut den matris A (*Leslie-matrisen*) som ger följande års åldersfördelningsvektor enligt formeln $\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}$. ($b$) Visa att $\mathbf{x}^{(k)}$ **kan** vara konstant (år efter år) om och endast om A har talet 1 som egenvärde. (c) Antag att en viss skalbagge har Leslie-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Är en konstant åldersfördelning möjlig? Har arten stora chanser att överleva?

7. (Exempel på en *Markovkedja*) Mor Stava har egenheten att vara glad eller ledsen en hel dag i sträck. Om hon är glad en viss dag, är sannolikheten för att hon skall vara glad respektive ledsen följande dag $0,6$ och $0,4$. Hon orkar inte vara ledsen särskilt länge, så att om hon är ledsen en viss dag så är sannolikheten för att hon är glad resp. ledsen följande dag $0,8$ och $0,2$. Om vektorn $(p \quad q)^T$ anger sannolikheterna p och $q = 1 - p$ för att Stava är glad resp. ledsen dag 0, så anger (enligt elementär sannolikhetslära) vektorn

$$\begin{pmatrix} 0,6p + 0,8q \\ 0,4p + 0,2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

motsvarande sannolikheter för dag 1 samt $A^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ motsvarande sannolikheter för dag n. En hur stor andel av sina levnadsdagar är mor Stava glad? (Ledning: Diagonalisera A och låt $n \to \infty$.)