7. Egenvärden och egenvektorer

Låt A beteckna en n/n-matris. I vissa riktningar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ beter sig matrisen A enkelt i den meningen att $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ råkar vara parallella:

Definition 7.1. Talet λ sägs vara ett *egenvärde* till A om

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

för någon vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Vektorn $\mathbf{x}$ sägs då vara en *egenvektor* till A som svarar mot egenvärdet λ.

Observera att om $\mathbf{x}$ är en egenvektor till A som svarar mot ett visst egenvärde λ, så är för varje $c \neq 0$ också $c\mathbf{x}$ en egenvektor som svarar mot egenvärdet λ. Längden av vektorn $\mathbf{x}$ är alltså irrelevant, endast riktningen har någon betydelse.

Egenvärden och egenvektorer är karakteristika för en matris A och berättar en hel del om matrisens egenskaper precis som t.ex. typen och rangen också gör det. Vi kommer att se att i många fall innehåller egenvärdena och egenvektorerna t.o.m. **all** information om A.

> **Exempel 7.1.** För en enhetsmatris I gäller att $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ för varje $\mathbf{x}$. Således är talet 1 ett egenvärde till I och varje $\mathbf{x} \neq 0$ är en motsvarande egenvektor.

Om λ är ett egenvärde till A och $\mathbf{x}$ är en motsvarande egenvektor, så är

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ \text{för ngt } \ \mathbf{x} \neq 0 \end{matrix} \right\} &\iff \left\{ \begin{matrix} (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \\ \text{för ngt } \ \mathbf{x} \neq 0 \end{matrix} \right\} \\
&\iff A - \lambda I \quad \text{är singulär} \\
&\iff \det(A - \lambda I) = 0\,.
\end{aligned}$$

Således gäller:

Sats 7.1. *Om A är en n/n-matris, så fås A:s egenvärden genom att man löser den s.k.* karakteristiska ekvationen *(också kallad* sekularekvationen*)*

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Därefter fås de egenvektorer, som svarar mot ett visst egenvärde λ, genom att man löser den homogena ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.

Då man utvecklar determinanten i den karakteristiska ekvationen, fås alltid en polynomekvation av n:te graden, i vilken koefficienten för λ^n är $(-1)^n$. En sådan har ju alltid exakt n (reella eller komplexa) lösningar då multipliciteten beaktas. Den karakteristiska ekvationen kan alltså skrivas i den ekvivalenta formen

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p} = 0\,,$$

där λ_k $(k = 1, \ldots, p)$ betecknar A:s **olika** egenvärden och n_k är den algebraiska *multipliciteten* hos egenvärdet λ_k. Om multipliciteten hos ett egenvärde är 1, 2, 3 ... sägs detta vara *enkelt*, *dubbelt*, *tredubbelt* ....

Definition 7.2. *Egenrummet* $V(\lambda)$ till en n/n-matris A med egenvärdet λ är nollrummet $N(A - \lambda I)$, dvs. lösningsmängden till $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Egenrummet $V(\lambda)$ är alltså ett underrum av $\mathbf{R}^n$ och består av nollvektorn och alla egenvektorer till A som svarar mot egenvärdet λ. Eftersom $N(A - 0 \cdot I) = N(A)$, så **är** 0 **ett egenvärde till** A **om och endast om matrisen** A **är singulär**.

Exempel 7.2. Den karakteristiska ekvationen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

är

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1\,.$$

Ur denna löser vi ut egenvärdena 3 och 1. De egenvektorer som svarar mot egenvärdet 3 fås nu genom att man löser ekvationen $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningarna är alltså $\mathbf{x} = t\,(1 \quad 1)^T$ och varje sådan vektor utom nollvektorn är en egenvektor som svarar mot egenvärdet 3. På samma sätt löser vi $(A - I)\mathbf{x} = 0$ med hjälp av räkneschemat

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och får fram de egenvektorer $\mathbf{x} = t\,(-1 \quad 1)^T$ $(t \neq 0)$ som svarar mot egenvärdet 1.

Om matrisen A är reell och ett egenvärde λ inte är reellt (dvs. äkta komplext), så måste åtminstone någon komponent av en motsvarande egenvektor $\mathbf{x}$ vara icke-reell för att likheten $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ skall kunna gälla. Om däremot både A och egenvärdet λ är reella, så kan motsvarande egenvektorer $\mathbf{x}$ väljas reella.

Exempel 7.3. Den karakteristiska ekvationen för matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är $\lambda^2 + 1 = 0$, varför egenvärdena är $\pm i$. De egenvektorer som svarar mot t.ex. egenvärdet i har formen $t\,(1 \quad -i)^T$, där $t \neq 0$ är ett reellt (eller komplext) tal.

Eftersom reella matriser således kan ha icke-reella egenvärden, så inser vi att teorin för egenvärden och egenvektorer egentligen borde utformas för komplexa matriser. I fortsättningen väljer vi emellertid alltid som exempel bara sådana matriser, som har reella egenvärden. I många fall är egenvärdena t.o.m. alltid automatiskt reella, såsom följande sats visar:

Sats 7.2. *Antag att A är en* symmetrisk *reell n/n-matris. Då gäller:*

(i) *Alla egenvärden till A är reella;*

(ii) *Om λ och μ är* olika *egenvärden till A så är $V(\lambda) \perp V(\mu)$.*

Bevis. (i) Låt λ vara ett egenvärde och låt $\mathbf{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ vara en motsvarande egenvektor. Här måste vi temporärt acceptera att $\mathbf{x}$ kan ha icke-reella komponenter eftersom vi ännu inte vet att λ i själva verket måste vara reellt. Om $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,)^T$, sätt $\mathbf{x}^* = (\,\overline{x_1} \quad \ldots \quad \overline{x_n}\,)$, där beteckningen $\overline{c} = a - ib$ står för konjugattalet till ett givet komplext tal $c = a + ib$. Om ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda x$ multipliceras från vänster med $\mathbf{x}^*$ fås $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^*\mathbf{x}$, dvs.

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}\,.$$

Nämnaren $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$ är en summa av kvadrater av belopp av komplexa tal och är således reell. Täljaren är ett komplext tal som sammanfaller med sitt eget konjugattal, ty eftersom $A = (a_{ik})$ är reell och symmetrisk, är

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}} &= \overline{\sum_{i,k} \overline{x_i} a_{ik} x_k} = \sum_{i,k} x_i a_{ik} \overline{x_k} \\ &= \sum_{i,k} \overline{x_k} a_{ki} x_i = \mathbf{x}^* A\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Då därmed både täljaren och nämnaren i uttrycket för λ är reella, så är λ reellt.

(ii) Vi skall visa att om vi tar godtyckliga (reella) vektorer $\mathbf{x} \in V(\lambda)$ och $\mathbf{y} \in V(\mu)$, så är $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}^T\mathbf{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{y}^T\mathbf{x} \end{array}\right\} \\ &\Longrightarrow \quad (\lambda - \mu)\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{y}\,.\ \Diamond\end{aligned}$$

För en matris A som inte är symmetrisk, behöver det inte gälla att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är ortogonala. Däremot måste de nog vara linjärt oberoende:

Sats 7.3. *Antag att $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ är* olika *egenvärden till en n/n-matris och låt $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ vara en uppsättning motsvarande egenvektorer, så att*

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k \qquad (k = 1, \ldots, p)\,.$$

Då är $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ linjärt oberoende.

Bevis. Satsen bevisas enklast genom induktion. Vi konstaterar först att påståendet gäller om $p = 1$. Sedan antar vi att påståendet gäller om vi har $p = k - 1$ egenvektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ och skall bevisa att påståendet också gäller då antalet är $p = k$. Vi bildar därför en linjärkombination av de k egenvektorerna och sättar denna lika med $\mathbf{0}$:

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Vi multiplicera från vänster med A, beaktar att $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ och får:

$$(2) \qquad c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{c}_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}\,.$$

Vektorn $\mathbf{x}_k$ elimineras genom att vi bildar skillnaden mellan (2) och λ_k gånger (1):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}\,.$$

Nu följer att $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$, eftersom $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ är linjärt oberoende. Enligt (1) är därför $c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ och därmed $c_k = 0$. Alltså är $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ linjärt oberoende. Induktionen ger att satsens påstående gäller för varje antal p av egenvektorer. $\diamondsuit$

Exempel 7.4. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(8-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Matrisen A har alltså egenvärdena 2 (dubbelt) och 8 (enkelt).

$\underline{\lambda = 2}$: En bas i egenrummet $V(2) = N(A - 2I)$ fås ur

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

och resulterer i $\{(\,-1 \quad 1 \quad 0\,)^T, (\,-1 \quad 0 \quad 1\,)^T\}$.

$\underline{\lambda = 8}$: En motsvarande kalkyl

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger basen $\{(\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T\}$ i $V(8) = N(A - 8I)$. Observera att vektorn $(\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T$ är ortogonal mot basvektorerna i $V(2)$ men att basvektorerna i $V(2)$ inte (automatiskt) behöver bli ortogonala mot varandra (jfr. Sats 7.2).

Exempel 7.5. Efter en stunds kalkylerande finner man att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$.

$\underline{\lambda = 2}$: En bas i $V(2)$ fås ur

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $\{(0 \quad 1 \quad 0)^T, (-1 \quad 0 \quad 1)^T\}$.

$\underline{\lambda = 1}$: Räkneschemat blir

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En bas i $V(1)$ består alltså av en enda vektor $(-2 \quad 1 \quad 1)^T$, som uppenbarligen **inte** är ortogonal mot basvektorerna i $V(2)$. Däremot bildar unionen av baserna i $V(2)$ och $V(1)$ en linjärt oberoende mängd (jfr. Sats 7.3).

På basen av de två senaste exemplen kunde man få uppfattningen att om multipliciteten hos ett egenvärde λ är t.ex. 2, så innehåller en bas i $V(\lambda)$ precis 2 vektorer. Detta behöver inte alltid vara fallet men för symmetriska matriser är det så:

Anmärkning. Man kan visa att om A är en symmetrisk n/n-matris med den karakteristiska ekvationen

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p} = 0,$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ är olika egenvärden och $\sum_i n_i = n$, så är

$$\dim V(\lambda_i) = n_i\,.$$

Vi ger ett exempel på en (icke-symmetrisk) matris, som saknar denna egenskap:

Exempel 7.6. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2$, varför det enda egenvärdet 0 har multipliciteten 2. Matrisen är redan i reducerad echelonform, så vi kan direkt avläsa att $\{(1 \quad 0)\}$ är en bas i motsvarande egenrum $V(0)$. Dimensionen hos $V(0)$ är således bara 1, inte 2.

Anmärkning. Matriserna i exemplen i denna kurs är så små att det fortfarande är möjligt att utveckla determinanten i den karakteristiska ekvationen. Om matrisen är stor, blir detta oftast en uppgift som överstiger krafterna. Andra metoder krävs då för att man skall få fram egenvärdena till matrisen. Som ett exempel på en sådan metod nämner vi att koefficienterna i den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

till en n/n-matris kan fås genom att man löser ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & \cdots & S_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ c_{n-3} \\ - \\ c_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ S_n \end{pmatrix},$$

där $S_k = \mathrm{tr}(A^k)$ för $k = 1, 2, \ldots, n$ är spåret av potensen A^k av matrisen A. Egenvärdena kan sedan bestämmas genom att man löser den karakteristiska ekvationen med numeriska metoder.

Övningsuppgifter

1. Finn alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matriserna

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm egenvärden och baser i egenrummen till matriserna

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix},$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 5 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & -1 \\ -5 & 18 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm egenvärden och baser i egenrummen för A^{62} då A är matrisen

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Visa att den karakteristiska ekvationen för en (reell) 2/2-matris A kan skrivas

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0\,.$$

   Bestäm villkoret för att A skall ha enbart reella egenvärden samt verifiera att detta villkor är uppfyllt för alla symmetriska 2/2-matriser.

5. Visa att A och A^T har samma egenvärden. Hur är två egenvektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ till A respektive A^T som svarar mot olika egenvärden relaterade till varandra?

6. Visa att om A är en uppåt (nedåt) triangulär matris eller en diagonalmatris, så är A:s egenvärden precis matriselementen i huvuddiagonalen i A.

7. En matris A sägs vara *nilpotent* om $A^k = 0$ för något positivt heltal k. Visa att en nilpotent matris bara har egenvärdet 0.

8. Låt $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ vara ett polynom och sätt $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. Visa att om λ är ett egenvärde till A, så är $p(\lambda)$ ett egenvärde till $p(A)$.