6. Determinanter

Innan vi slår fast en definition av begreppet determinant, behöver vi vissa förberedande förklaringar:

En *permutation* av talen $1, \dots, n$ är en uppräkning $(j_1, \dots, j_n)$ av dessa samma tal i någon ordning. Mängden av alla permutationer av $1, \dots, n$ betecknar vi med S_n. Observera att en permutation $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ också kan uppfattas som en funktion $\sigma : k \mapsto \sigma(k) = j_k$ med indexet k som argument och talet j_k som funktionsvärde.

Exempel 6.1. Både $(2, 1, 4, 3)$ och $(4, 3, 1, 2)$ är permutationer av talen 1, 2, 3, 4.

En *inversion* förekommer vid (i, k) (och (k, i)) i en permutation $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ om för två index i och k med $i < k$ gäller $j_i > j_k$, dvs. om talen j_i och j_k kommer i omvänd storleksordning. Det totala antalet inversioner i $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ är

$$\begin{aligned} t(\sigma) = \quad & \#(k > 1 \quad \text{med} \quad j_1 > j_k) \\ & + \#(k > 2 \quad \text{med} \quad j_2 > j_k) + \cdots + \#(k > n-1 \quad \text{med} \quad j_{n-1} > j_k)\,. \end{aligned}$$

Permutationen σ är *jämn* om $t(\sigma)$ är ett jämnt tal och *udda* om $t(\sigma)$ är udda.

Exempel 6.2. Om $\sigma = (4, 3, 1, 2)$ så är $t(\sigma) = 3 + 2 + 0 = 5$, dvs. σ är en udda permutation.

Låt nu $A = (a_{ij})$ vara en n/n-matris.

Definition 6.1. En *elementär produkt* i A är en produkt av n element i A, vilka alla tagits ur **olika** rader och kolonner.

Exempel 6.3. Om

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

så är t.ex. $a_{12}a_{21}a_{33}$ och $a_{11}a_{23}a_{32}$ elementära produkter i A.

Definition 6.2. *Determinanten* av matrisen $A = (a_{ik})$ är summan

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\,,$$

(där $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$) av alla de $n!$ elementära produkterna i A försedda med tecknet

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{t(\sigma)} = \begin{cases} 1, & \text{om } \sigma \text{ är en jämn permutation} \\ -1, & \text{om } \sigma \text{ är en udda permutation.} \end{cases}$$

Oftast använder man beteckningen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

för determinanten $\det(A)$.

Exempel 6.4. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

har de två elementära produkterna $a_{11}a_{22}$ och $a_{12}a_{21}$. Den första av dessa får ett positivt tecken, eftersom permutationen $(1,2)$ är jämn, medan den andra får ett negativt tecken, eftersom permutationen $(2,1)$ är udda. Alltså är

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Exempel 6.5. För en 3/3-matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

har vi $3! = 6$ elementära produkter att bestämma tecknet för:

Elementär produkt	$\epsilon(\sigma)$
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$+1$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	-1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	-1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$+1$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$+1$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	-1

T.ex. får den elementära produkten i rad två ett minustecken, eftersom permutationen $(1,3,2)$ är udda. Tecknen i denna tabell kan sammanfattas i *Sarrus regel*: Upprepa A:s två första kolonner efter A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

De tre produkter som bildas av element på en (åt höger) snett nedåtgående diagonallinje genom denna rektangel av tal, är de elementära produkter som får plustecken (t.ex. huvuddiagonalen i A) medan de tre produkter, som bildas av element på en snett uppåtgående diagonallinje, är de elementära produkter som får minustecken. Kom ihåg att **Sarrus regel bara gäller för 3/3-matriser**.

Egenskaper hos determinanter

En n/n-determinant ger upphov till $n!$ elementära produkter. Om n är stort (ja, redan om $n = 4$) innehåller definitionsuttrycket för en determinant alltför många termer för att det skall löna sig att använda detta då man räknar ut determinantens värde. De egenskaper hos determinanter som vi nu skall härleda utgör i själva verket **räkneregler** som kommer att ge oss effektiva metoder att räkna ut determinanter – både stora och små.

1. *En n/n-matris och dess transponerade matris har samma determinant*

$$\det(A^T) = \det(A)\,.$$

Bevis. Då man bildar en elementär produkt, tar man exakt ett element ur varje rad och kolonn. Alltså ger A och A^T upphov till precis samma elementära produkter. Det återstår för oss bara att förklara varför dessa elementära produkter förses med samma tecken. I en godtycklig elementär produkt $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ i A kan vi byta ordningsföljd på faktorerna så att den kan tolkas som en elementär produkt för A^T:

$$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n}\,.$$

Då är permutationerna $\sigma : i \mapsto j_i$ och $\tau : r \mapsto k_r$ varandras inversa funktioner, $\tau = \sigma^{-1}$. En inversion förekommer i σ vid (i, l) om och endast om $l - i$ och $\sigma(l) - \sigma(i)$ har olika tecken, dvs. om och endast om

$$\frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{l - i} = \frac{j_l - j_i}{l - i} < 0\,.$$

Denna kvot är negativ om och endast om den inverterade kvoten är negativ,

$$\frac{\tau(j_l) - \tau(j_i)}{j_l - j_i} = \frac{l - i}{j_l - j_i} < 0\,,$$

och detta gäller precis då det förekommer en inversion i τ vid (j_l, j_i). Permutationerna σ och τ innehåller alltså lika många inversioner och ger upphov till samma tecken. $\diamondsuit$

Anmärkning. På grund av egenskap 1 har rader och kolonner i en determinant samma ställning. Därför **kan räknereglerna 2 till 6**, som vi nedan formulerar för kolonner, utan vidare **formuleras också för rader**.

2. *Låt $A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_i \quad \dots \quad \mathbf{a}_k \quad \dots \quad \mathbf{a}_n\,)$ vara en matris och låt A' vara den matris som uppkommer då kolonnerna $\mathbf{a}_i$ och $\mathbf{a}_k$ byter plats i A. Då är*

$$\det(A') = -\det(A)\,.$$

En motsvarande regel gäller vid ombyte av rader.

Bevis. Låt $\sigma = (j_1, \dots, j_i, \dots, j_k, \dots, j_n)$ beteckna en en godtycklig permutation och låt σ' vara den permutation som uppstår då j_i och j_k byter plats i σ. Vi kan visa att $t(\sigma) - t(\sigma') = u$ alltid är ett udda tal. Därför är

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{\sigma'\in S_n} -\epsilon(\sigma') a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = -\det(A')\,.\end{aligned}$$

Resonemanget är litet komplicerat men vi återger det för fullständighetens skull.

Bevis för att u är udda: Bara inversioner av typerna

$$\begin{array}{lll} (1) & j_i > j_l, & i < l < k\,, \\ (2) & j_l > j_k, & i < l < k\,, \end{array}$$

kan uppkomma eller försvinna då j_i och j_k byter plats i σ. Låt I vara mängden av alla heltal l mellan i och k och sätt

$$\begin{aligned} n_1 &= \#(l \in I \text{ med } j_i < j_l), \quad & m_1 &= \#(l \in I \text{ med } j_l < j_k), \\ n_2 &= \#(l \in I \text{ med } j_i > j_l), \quad & m_2 &= \#(l \in I \text{ med } j_l > j_k)\,. \end{aligned}$$

Antalet inversioner förändras med

$u_1 = n_1 - n_2$, pga. att j_i flyttas till andra sidan av j_l,
$u_2 = m_1 - m_2$, pga. att j_k flyttas till andra sidan av j_l,
$u_3 = \pm 1$, pga. att j_i och j_k byter plats.

Eftersom $n_1 + n_2 = m_1 + m_2 = (k - i) - 1$ är konstant, så förändras u_1 och u_2 med steglängden ± 2 då n_1, n_2 respektive m_1, m_2 ändras. Således är antingen u_1 och u_2 bägge udda (då $(k-i)-1$ är udda) eller bägge jämna (då $(k-i)-1$ är jämnt). Men då är ju $u_1 + u_2$ alltid jämnt och den totala förändringen av antalet inversioner $u = u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_2 \pm 1$ alltid udda. $\diamondsuit$

3. *Om två kolonner* (eller rader) *är lika i matrisen A, så är*

$$\det(A) = 0\,.$$

Bevis. Om $A = (\ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots)$ och $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_k$, så är enligt regel 2

$$\det(A) = \det(\ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots) = -\det(\ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots) = -\det(A)$$

och därmed $\det(A) = 0$. $\diamondsuit$

Nästa egenskap följer direkt ur definitionen på en determinant och kräver därför inget bevis:

4. *Om en kolonn* (eller rad) *innehåller en gemensam faktor, så kan denna faktor flyttas ut ur determinanten:*

$$\det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \lambda\mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n)\,.$$

Exempel 6.6. I nedanstående determinant tar vi ut faktorn 2 ur första raden och faktorn 3 ur andra raden och får värdet

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0\,,$$

eftersom de två första raderna blir lika (regel 3).

5. *En determinant är additiv i varje kolonn* (och rad),

$$\det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \ \dots \ \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_i \ \dots \ \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_i' \ \dots \ \mathbf{a}_n)\,.$$

Bevis. Enligt distributionslagen för tal kan de elementära produkterna i vänstra ledet skrivas

$$a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + a_{ij_i}') \cdots a_{nj_n} = a_{1j_1} \cdots a_{ij_i}' \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}\,.$$

Regeln följer ur detta och definitionen på en determinant. $\diamondsuit$

Exempel 6.7. Om vi tillämpar regel 5 på rader får vi att

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 2+3 & 1+0 & 3+1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Som en direkt följd av reglerna 5, 4 och 3 fås:

6. *Om $i \neq k$ så är*

$$\det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_i \ \dots \ \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_i - \lambda\mathbf{a}_k \ \dots \ \mathbf{a}_n)\,, \qquad (i \neq k)\,.$$

Anmärkning. Formulerad för rader säger denna regel att en determinants värde förblir oförändrat vid användning av $(BO1)$:

$$\det\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i - \lambda\bar{\mathbf{a}}_k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix}\,, \qquad (i \neq k)\,.$$

Om vi således med en följd av användningar av $(BO1)$ kan överföra en matris A på en uppåt triangulär form U,

$$A \to \cdots \to U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}\,,$$

så är $\det(A) = \det(U) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$. I en triangulär matris är nämligen produkten av diagonalelementen den enda elementära produkt som kan vara olik noll. Alla andra elementära produkter innehåller minst en nolla.

Detta ger oss en effektiv metod att räkna ut värdet på en determinant. Reglerna 2 och 4 utgör ju något modifierade varianter av $(BO2)$ och $(BO3)$, så i praktiken **har vi Gausselimineringens alla verktyg till vårt förfogande**:

Exempel 6.8. För att kunna använda det "enkla" pivotelementet 1 flyttar vi i nedanstående determinant först ut den gemensamma faktorn 2 i andra raden och låter samtidigt de två första raderna byta plats ... :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2)(-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -12\,.$$

7. *En kvadratisk matris A är singulär om och endast om* $\det(A) = 0$.

Bevis. Matrisen A kan överföras på en uppåt triangulär matris U med hjälp av enbart $(BO1)$ och $(BO2)$. Nu gäller

$$\begin{aligned} A \text{ är singulär} &\iff U \text{ är singulär} \\ &\iff \text{något diagonalelement i } U \text{ är noll} \\ &\iff \det(U) = 0 \\ &\iff \det(A) = 0\,, \end{aligned}$$

ty $\det(A) = \pm\det(U)$, där vi har ett minustecken om $(BO2)$ har använts ett udda antal gånger.

8. *Om A och B är n/n-matriser, så är*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

Determinanter kan alltså multipliceras med varandra på samma sätt som man multiplicerar matriser.

Bevis. (a) Vi visar först att formeln gäller om A är en diagonalmatris. Om

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix},$$

så är enligt regel 4

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} d_1\overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ d_n\overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = d_1 \cdots d_n \cdot \det \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

(b) Antag att A är en godtycklig n/n-matris. Om A **är singulär**, så är också A^T singulär och följaktligen också $B^T A^T = (AB)^T$. Nu är både $\det(A) = 0$ och $\det(AB) = \det((AB)^T) = 0$ enligt regel 7. Formeln gäller alltså i detta fall, eftersom bägge leden är noll.

Om A **inte är singulär**, så kan A överföras på en diagonalmatris D med hjälp av enbart $(BO1)$ och $(BO2)$:

$$A \to \cdots \to D = \text{ diagonalmatris}\,, \tag{1}$$

där $\det(A) = \pm\det(D)$. Det första steget i (1) får i det fortsatta resonemanget representera vilket steg som helst. Om detta är $(BO1)$-operationen

$$A = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i - \lambda\bar{\mathbf{a}}_k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} = A_1\,,$$

så fås med samma basoperation och samma λ, att

$$AB = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i B - \lambda\bar{\mathbf{a}}_k B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n B \end{pmatrix} = A_1 B\,.$$

Är det första steget i (1) igen en $(BO2)$-operation

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_k \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = A_1\,,$$

så fås med ombyte av samma rader

$$AB = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_k B \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_k B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_i B \\ \vdots \end{pmatrix} = A_1 B\,.$$

Precis samma sekvens av basoperationer som i (1), använd på produkten AB, leder alltså till

$$AB \to \cdots \to DB\,,$$

där det enligt tidigare regler och enligt fall (a) gäller att

$$\det(AB) = \pm\det(DB) = \pm\det(D)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)\,.$$

Formeln i regel 8 gäller alltså generellt för godtyckliga matriser A och B. $\diamondsuit$

Utveckling efter en rad eller en kolonn

Termerna i definitionsuttrycket för en determinant kan grupperas så att varje grupp representer ett element i determinanten multiplicerat med determinanten för en submatris försedd med plus- eller minustecken. Vi illustrerar detta med hjälp av en 3/3-determinant:

Exempel 6.9. Med hjälp av definitionen (eller Sarrus regel) utvecklar vi determinanten samt grupperar ihop de termer som vi nedan har skrivit under varandra:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ =& a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ =& a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\,.\end{aligned}$$

Det nästsista och sista uttrycket kallas utvecklingen av determinanten efter första raden. Genom att gruppera termerna på annat sätt får man utvecklingar efter andra rader eller kolonner.

Den "subdeterminant med tecken" som vi i ovanstående exempel betecknat med A_{ik} kallas *kofaktorn* (eller *komplementet*) till elementet a_{ik}. Allmänt får vi:

Sats 6.1. *Om $A = (a_{ik})$ är en n/n-matris och $\hat{A}_{ik}$ betecknar den submatris som uppstår då rad i och kolonn k stryks i A, så är*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

utvecklingen av $\det(A)$ efter rad i, *där* kofaktorerna A_{ik} *fås ur*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \det(\hat{A}_{ik})\,.$$

På motsvarande sätt kan $\det(A)$ *utvecklas efter en kolonn.*

Tecknet på en kofaktor bestäms enklast genom att man kommer ihåg att matriselementet längst uppe till vänster är associerat med en kofaktor med ett plustecken framför en subdeterminant. De övriga elementen är sedan omväxlande associerade med plus- och minustecken precis som rutorna på ett schackbräde omväxlande är vita och svarta.

Exempel 6.10. Om vi vill utveckla följande 3/3-determinant efter 2:a kolonnen, så bör vi alltså associera ett minustecken med elementen 6 och 2 och ett plustecken med elementet -1 i andra kolonnen. Vi får utvecklingen:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\,.$$

Matrisinverser

Betrakta utvecklingen efter rad k av determinanten för en n/n-matris $A = (a_{lm})$:

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \,. \tag{2}$$

Den likartade summan

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} \,, \qquad (i \neq k) \,,$$

kan uppenbarligen betraktas som utvecklingen efter rad k av den determinant som vi får ur $\det(A)$ genom att ersätta rad k med en kopia av rad i. Eftersom två rader är lika i denna determinant, är dess värde noll:

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \,, \qquad (i \neq k) \,. \tag{3}$$

Likheterna (2) och (3) kan skrivas på en enda rad med hjälp av Kroneckers delta,

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \det(A) \cdot \delta_{ik} \,.$$

Vänstra ledet kan nu tolkas som ett matriselement i produkten av A med

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

vilken ibland kallas den *adjungerade matrisen* till A. Observera att det första indexet här är kolonnindex medan det andra är radindex. Vi har alltså likheten $A\tilde{A} = \det(A)\cdot I$, vilket ger formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

för matrisinversen om $\det(A) \neq 0$ (dvs. om A är icke-singulär).

Anmärkning. Denna formel är intressant ur teoretisk synvinkel men olämplig för numerisk uträkning av matrisinverser. Alla de n^2 matriselementen är ju $(n-1)/(n-1)$-determinanter, som var och en skall räknas ut separat.

Exempel 6.11. Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, så är

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \,,$$

ifall $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Cramers regel

Om n/n-matrisen A är inverterbar så kan lösningen till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skrivas

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\mathbf{b},$$

vilket i komponentform ger

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k, \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Summan i högerledet kan uppfattas som utvecklingen efter kolonn j av en determinant $\det(B_i)$, där B_j är den matris som uppstår ur A då kolonn j ersätts med $\mathbf{b}$:

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vi får därmed *Cramers regel* för komponenterna av $\mathbf{x}$:

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}, \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Anmärkning. Cramers regel är inte lämplig för numeriska kalkyler. För det första kan den användas bara om $\det(A) \neq 0$. För det andra är den oekonomisk, eftersom den kräver väsentligt fler räkneoperationer än Gausseliminering. I nedanstående tabell jämförs antalet räkneoperationer vid lösning av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ medelst tre metoder: (1) genom Gausseliminering, (2) genom användning av formeln $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ (där A^{-1} räknas ut genom Gausseliminering), (3) genom Cramers regel. Som räkneoperationer betraktas här addition (= subtraktion) och multiplikation (= division).

Metod	Antal operationer
Gausseliminering	$\approx \frac{2}{3}n^3$
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$\approx 2n^3$
Cramers regel	$\approx \frac{2}{3}n^4$

Om $n = 10$ så kräver alltså Cramers regel ungefär 10 gånger fler operationer än lösning genom Gausseliminering, om $n = 100$ kräver den ungefär 100 gånger fler operationer.

Övningsuppgifter

1. (a) Räkna ut determinanten för matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Beräkna determinanten för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

genom att gausseliminera A till en uppåt triangulär form U.

2. En matris A är *skevsymmetrisk* om $A^T = -A$. Visa att för varje skevsymmetrisk n/n-matris A gäller att $\det(A) = 0$ om n är ett udda heltal.

3. Bestäm determinanterna för

(*a*) matrisprodukten $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(*b*) den uppåt triangulära matrisen $U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(*c*) den nedåt triangulära matrisen U^T;

(*d*) inversen U^{-1};

(*e*) matrisen $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

4. (*a*) Visa att om Q är en ortogonal matris så gäller $\det(Q) = 1$ eller $\det(Q) = -1$ (se uppgift 20 i kapitel 3).

(*b*) För vilka 2/2-matriser A gäller att $\det(3A) = 3\det(A)$?

5. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

6. Räkna ut den n-radiga determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Visa att

$$\begin{vmatrix} a+b & c+a & b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & a+b & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}.$$

8. Beräkna determinanterna

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad (c) \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

9. Visa att
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \, .$$

10. Visa, utan att utveckla determinanterna, att
$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \, .$$

11. Räkna ut determinanaten
$$\begin{vmatrix} 4711 & 4712 & 4713 \\ 4712 & 4713 & 4714 \\ 4713 & 4714 & 4716 \end{vmatrix} \, .$$

12. Använd determinantformeln för en matrisinvers till att beräkna A^{-1}, då
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

13. Lös följande system med hjälp av Cramers regel:
$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + 3z &= 0 \, . \end{aligned}$$

14. Visa att matriselementen i A^{-1} är heltal om A är inverterbar, alla matriselement i A är heltal och $\det(A)$ är 1 eller -1.

15. Visa att
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & a_1 \\ 0 & 1 & .. & a_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & .. & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & b_1 \\ 0 & 1 & .. & b_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & .. & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ - & - & - & - \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{vmatrix} \, .$$

16. Visa att om i en matris A summan av elementen i varje rad är noll, så är $\det(A) = 0$.

17. Räkna ut $\det(A)$, då n/n-matrisen $A = (a_{ik})$ har matriselementen $a_{ik} = i + k$ för varje i och k i mängden $\{1, \ldots, n\}$.

18. Bestäm med hjälp av determintteori för vilka värden på k följande matriser inte är inverterbara:
$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} k-2 & 1 \\ -5 & k+4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad B = \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} \, .$$

19. I en triangel med sidorna a, b och c må de motstående vinklarna vara α, β respektive γ. Med hjälp av elementär trigonometri fås sambanden
$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a, \\ c\cos\alpha + c\cos\gamma &= b, \\ a\cos\beta + c\cos\alpha &= c. \end{aligned}$$

Härled med hjälp av Cramers regel formler for vinklarnas cosiner.