4. Vektorrum

Tidigare har vi räknat upp en rad av räkneregler som gäller för m/n-matriser. Dessa regler gäller inte bara för varje matristyp m/n utan också för många andra "objekt" som t.ex. funktioner, talföljder, matrisföljder osv. För att inte behöva upprepa alla bevis för varje typ av objekt, inför vi begreppet vektorrum som en mängd av abstrakta objekt (vektorer), som kan representera vilket som helst av de ovannämnda slagen av objekt. Allt som kan bevisas för vektorer i vektorrum, kommer då automatiskt att gälla för varje slag av objekt som underlyder vissa gemensamma grundräkneregler som vi kallar axiom.

På samma sätt har ju det abstrakta talet 2 införts för att man inte skall behöva ha skilda bevis för multiplikation med två liter och för multiplikation med två grodor.

Axiom för vektorrum

Det matematiska begreppet vektorrum är centralt i den linjära algebran. Vi inför det genom att räkna upp en rad av axiom (= räkneregler) som ett vektorrum skall uppfylla. Dessa axiom är ett urval bland de räkneregler som vi tidigare har konstaterat att gäller för matriser.

Definition 4.1. En mängd E sägs vara ett *vektorrum* och elementen i E kallas *vektorer*, om två räkneoperationer, *addition* och *multiplikation med skalär*, är definierade i E så att de nedan uppräknade axiomen gäller. Additionen tillordnar varje par $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i E en summa $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ i E och multiplikationen med skalär tillordnar varje par λ, $\mathbf{x}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \in E$) en produkt $\lambda\mathbf{x}$ i E, så att följande gäller:

I. (*a*) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E)$, (kommutationslag)

(*b*) $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E)$, (associationslag)

(*c*) Det finns ett element i $\mathbf{0} \in E$, kallat *nollvektorn*, sådant att $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$

(*d*) För varje $\mathbf{x} \in E$ finns ett element $-\mathbf{x} \in E$, den *motsatta vektorn*, sådant att $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$

II. (*a*) $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in E)$, (associationslag)

(*b*) $1\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in E)$

III. (*a*) $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}\,, \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in E)$, (distributionslag)

(*b*) $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\,, \quad (\lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E)$, (distributionslag).

Vi ger genast några exempel på mängder som är vektorrum:

Exempel 4.1. Mängden E av alla m/n-matriser, försedd med vanlig matrisaddition och vanlig multiplikation av en matris med en skalär, är ett vektorrum, eftersom de ovan uppräknade axiomen lätt kan konstateras gälla för dessa operationer. Speciella exempel på vektorrum är följaktligen mängden $\mathbf{R}^m$ av alla $m/1$-matriser, dvs. kolonnvektorer, och mängden $\mathbf{R}^n$ av alla $1/n$-matriser, dvs. radvektorer. Man brukar använda samma beteckning för bägge, dvs. $\mathbf{R}^m$ och $\mathbf{R}^n$, på grund av att skillnaden mellan en kolonnvektor och en radvektor är obetydlig: Den ena typen övergår ju i den andra genom transponering (det är bara vid matrismultiplikation som det är väsentligt hur man skriver en vektor).

Då m och n är 2 eller 3 representerar vektorrummen $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$ på känt sätt ett två- respektive ett tredimensionellt "koordinatsystem".

Exempel 4.2. Mängden $\mathcal{M}$ av alla funktioner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ med definitionsmängden $[a,\, b]$ är ett vektorrum då följande räkneoperationer är definierade i $\mathcal{M}$:

I. Om $f_1 \in \mathcal{M}$ och $f_2 \in \mathcal{M}$ så definieras $f_1 + f_2$ genom
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)\,, \quad x \in [a,\, b]\,;$$

II. Om $f \in \mathcal{M}$ och $\lambda \in \mathbf{R}$, definieras λf genom
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,, \quad x \in [a,\, b]\,.$$

Både $f_1 + f_2$ och λf är funktioner i mängden $\mathcal{M}$. Att alla axiomen är uppfyllda är lätt att verifiera (på grund av att de reella talen uppfyller axiomen). T.ex. är nollvektorn i axiom I (c) precis den funktion (betecknad med 0 och kallad *nollfunktionen*), som har värdet 0 i hela intervallet $[a,\, b]$. Att axiom I (d) är uppfyllt ser vi av följande: Om $f \in \mathcal{M}$ så väljer vi $-f$ att vara $(-1)f$. Då är $f + (-f) = 0$, ty

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0\,, \quad x \in [a,\, b]\,.$$

Exempel 4.3. Mängden E av alla funktioner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, med definitionsmängden $[a,\, b]$ och med värden i vektorrummet $\mathbf{R}^n$, är ett vektorrum då operationerna definieras som i föregående exempel. Axiomen är lätta att verifiera på grund av att värdemängden $\mathbf{R}^n$ är ett vektorrum.

Utgående från axiomen kan hela teorin byggas upp systematiskt. Vi bevisar här som exempel några grundläggande saker:

1. *Nollvektorn är entydig.*

Om både $\mathbf{0}_1$ och $\mathbf{0}_2$ är nollvektorer i ett vektorrum, så gäller:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{0}_1 = \mathbf{x} \text{ för varje } \mathbf{x} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{x} + \mathbf{0}_2 = \mathbf{x} \text{ för varje } \mathbf{x} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1\,. \end{aligned}$$

Eftersom additionen är kommutativ, är därmed $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

2. *Vektorn* $-\mathbf{x}$ *är entydig, då vektorn* $\mathbf{x}$ *är given.*

   Om både $(-\mathbf{x})_1$ och $(-\mathbf{x})_2$ är motsatta vektorer till $\mathbf{x}$, är $(-\mathbf{x})_1+\mathbf{x}=\mathbf{0}$ och $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})_2=\mathbf{0}$ och därmed är de lika:

$$(-\mathbf{x})_1=(-\mathbf{x})_1+(\mathbf{x}+(-\mathbf{x})_2)=((-\mathbf{x})_1+\mathbf{x})+(-\mathbf{x})_2=(-\mathbf{x})_2\,.$$

   På grund av denna entydighet och kommutativiteten kommer $\mathbf{x}$ och $-\mathbf{x}$ att vara varandras motsatta vektorer, så att

$$-(-\mathbf{x})=\mathbf{x}\,.$$

3. *För givna* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *har ekvationen* $\mathbf{x}+\mathbf{t}=\mathbf{y}$ *den entydiga lösningen* $\mathbf{t}=\mathbf{y}+(-\mathbf{x})$.

   På grund av associativiteten behöver man inte skriva ut parenteser i summor. Vi får då följande ekvivalenser genom att addera $-\mathbf{x}$ (eller $\mathbf{x}$) till bägge leden:

$$\mathbf{x}+\mathbf{t}=\mathbf{y}\quad\Leftrightarrow\quad(-\mathbf{x})+\mathbf{x}+\mathbf{t}=(-\mathbf{x})+\mathbf{y}\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{t}=(-\mathbf{x})+\mathbf{y}\,.$$

   I fortsättningen kommer vi oftast att använda beteckningen $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ i stället för $\mathbf{y}+(-\mathbf{x})$.

4. *Det gäller att* $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *om och endast om* $\lambda=0$ *eller* $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

   Först ses att $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ty om man löser ut $0\mathbf{x}$ ur

$$\mathbf{x}+0\mathbf{x}=(1+0)\mathbf{x}=1\mathbf{x}=\mathbf{x}\,,$$

   får man att $0\mathbf{x}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (enligt 3). Med hjälp av detta fås $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=(1+(-1))\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$, varför

$$(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$$

   enligt 2. Detta ger att

$$\lambda\mathbf{0}=\lambda(\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}))=(\lambda\mathbf{x})+(-\lambda\mathbf{x})=\mathbf{0}\,.$$

   Antag omvänt att $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Om nu $\lambda\neq 0$, så är $\mathbf{x}=(1/\lambda)(\lambda\mathbf{x})=(1/\lambda)\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Är igen $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, så är $\lambda=0$ (vore nämligen $\lambda\neq 0$ så vore $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ enligt föregående mening). Minst en av faktorerna måste alltså vara noll om $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Underrum

Ofta ligger ett vektorrum inne i ett annat vektorrum. Om bägge vektorrummen har samma addition och multiplikation med skalär, säger man att det "mindre" vektorrummet är ett underrum av det "större". Nedanstående definition är mera praktisk att använda men innebär ändå precis detta.

Definition 4.2. Antag att E är ett vektorrum. En delmängd U av E är ett *underrum* av E om mängden U är *sluten* med avseende på operationerna addition och multiplikation med skalär i följande mening:

$$\mathbf{x},\,\mathbf{y}\in U;\ \lambda\in\mathbf{R}\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}\mathbf{x}+\mathbf{y}\in U\\ \lambda\mathbf{x}\in U\end{array}\right\}.$$

Eftersom axiomen för vektorrum gäller i E, så gäller de automatiskt också i underrummet U. Således gäller: **Varje underrum av E är ett vektorrum**. Ett underrum av ett vektorrum E är alltså ett annat vektorrum som råkar finnas inne i E.

Exempel 4.4. Betrakta i vektorrummet $\mathbf{R}^3$ delmängden U av alla vektorer av formen $(\,x_1 \quad 0 \quad x_3\,)$, dvs. x_1x_3-planet. Då är mängden U sluten med avseende på räkneoperationerna, ty summan av två vektorer, vilkas andra komponent är 0, har andra komponenten 0, och produkten av en skalär λ med en vektor, vilkens andra komponent är 0, har 0 som andra komponent. Alltså är x_1x_3-planet ett underrum av $\mathbf{R}^3$.

Exempel 4.5. Sätt $U = \{(\,x \quad y\,) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ och förse U med samma räkneoperationer som i $\mathbf{R}^2$ (dvs. addition och multiplikation med skalär). Geometriskt är U en rät linje genom origo. Om man får som uppgift att visa att U är ett vektorrum, räcker det att visa att U är ett underrum av $\mathbf{R}^2$, som vi redan vet att är ett vektorrum. Vi undersöker därför om U är slutet med avseende på räkneoperationerna:

Tag $\mathbf{u} = (\,x_1 \quad y_1\,) \in U$ och $\mathbf{v} = (\,x_2 \quad y_2\,) \in U$. Då är $x_1 + y_1 = 0$ och $x_2 + y_2 = 0$ och summan av komponenterna i vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\,x_1 + x_2 \quad y_1 + y_2\,) \\ \lambda\mathbf{u} &= (\,\lambda x_1 \quad \lambda y_1\,)\ , \quad (\lambda \in \mathbf{R}), \end{aligned}$$

blir då noll, varför de enligt definitionen är vektorer i U:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0\,, \\ (\lambda x_1) + (\lambda y_1) &= \lambda(x_1 + y_1) = 0\,. \end{aligned}$$

Följaktligen är U ett underrum av $\mathbf{R}^2$ och därmed också ett vektorrum.

Exempel 4.6. Om vi sätter $U_1 = \{(\,x \quad y\,) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$ så är U_1 inget underrum av $\mathbf{R}^2$. Mängden U_1 är nämligen inte sluten med avseende på t.ex. multiplikation med skalär: Om $(\,x \quad y\,) \in U_1$, så är $x + y = 1$ och då är $2\,(\,x \quad y\,) \notin U_1$, eftersom $(2x) + (2y) = 2(x + y) = 2$.

Allmänt gäller att ett underrum måste innehålla nollvektorn $\mathbf{0}$, eftersom varje underrum ju är ett vektorrum.

Om E är ett vektorrum, så är delmängderna $\{\mathbf{0}\}$ och E underrum av E. Dessa kallas *triviala* underrum. *Äkta* underrum kallas varje underrum, som inte omfattar hela vektorrummet E.

Det är lätt att inse att en delmängd U av $\mathbf{R}^2$ är ett icke-trivialt underrum om och endast om U är en **rät linje genom origo**. På samma sätt är en delmängd V av $\mathbf{R}^3$ är ett icke-trivialt underrum, om och endast om V är en **rät linje genom origo** eller är ett **plan genom origo**.

Exempel 4.7. Mängden $\mathcal{P}$ av alla polynomfunktioner är ett underrum av vektorrummet $\mathcal{M}$ (i exempel 4.2) av alla funktioner, som är definierade på intervallet $[a,\,b]$. Mängden $\mathcal{P}_n$ av alla polynomfunktioner av högst graden n är ett underrum av både $\mathcal{P}$ och $\mathcal{M}$.

Kolonnrummet och nollrummet till en matris

Med varje matris kommer vi att associera fyra underrum. I detta avsnitt introducerar vi två av dem.

Redan tidigare har vi sett, att i en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan vänsterledet $A\mathbf{x}$ uppfattas som en linjärkombination av kolonnvektorerna i matrisen A. I t.ex. i ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

kan vänsterledet skrivas

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(Se Sats 2.1)}\,.$$

Den generella definitionen är:

Definition 4.3. Antag att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_p$ är vektorer i ett vektorrum E (dvs. element i mängden E). En *linjärkombination* av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_p$ är en vektor av formen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p\,,$$

där koefficienterna c_1, c_2, ... , c_p är reella tal. Genom att variera dessa koefficienter fås **alla** linjärkombinationer av vektorerna $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Mängden av alla dessa,

$$U = \operatorname{spn}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \mid c_1, \ldots, c_p \in \mathbf{R}\}\,,$$

kallas *spannet* av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_p$. Man säger att spannet U *spänns upp* av vektorerna $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, p$.

Sats 4.1. *Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ är vektorer i ett vektorrum E, så är spannet*

$$U = \operatorname{spn}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

ett underrum av E.

Bevis. Om $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ och $\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_p\mathbf{v}_p$ är godtyckliga vektorer i U och om $\lambda \in \mathbf{R}$, så är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_p + d_p)\mathbf{v}_p \in U\,, \\ \lambda\mathbf{x} &= (\lambda c_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda c_p)\mathbf{v}_p \in U\,. \end{aligned}$$

Enligt definitionen är U då ett underrum av E. $\diamondsuit$

Antag nu att $A = (\,\mathbf{a}_1 \;\ldots\; \mathbf{a}_n\,)$ är en m/n-matris med kolonnvektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Definition 4.4. *Kolonnrummet* $R(A)$ till A är spannet av kolonnerna i A, dvs.

$$R(A) = \operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}\,.$$

Exempel 4.8. Kolonnrummet $R(A)$ till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

är spannet av kolonnerna $(\,2 \quad 1 \quad 0\,)^T$ och $(\,0 \quad 1 \quad 2\,)^T$. Geometriskt är $R(A)$ det plan i $\mathbf{R}^3$ som går genom origo och som innehåller dessa två vektorer.

Ibland behövs inte alla kolonner i matrisen för att beskriva kolonnrummet. T.ex. i matrisen

$$B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\,) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

är $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{b}_2$. En godtycklig linjärkombination av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ kan därför skrivas som en linjärkombination av enbart $\mathbf{b}_2$:

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 = (2c_1 + c_2)\mathbf{b}_2\,.$$

Alltså är $R(B) = \operatorname{spn}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \operatorname{spn}\{\mathbf{b}_2\}$.

Giltigheten hos det första påståendet i nästa sats följer ur Sats 4.1 medan det andra är en följd av att vänstra ledet i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är en linjärkombination av A:s kolonner:

Sats 4.2. *Antag att A är en m/n-matris. Då gäller:*

(*i*) *$R(A)$ är ett underrum av $\mathbf{R}^m$;*

(*ii*) *Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning* (dvs. är konsistent) *om och endast om $\mathbf{b} \in R(A)$.*

Vi har sett att ett homogent system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid har åtminstone den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Om det existerar fria variabler så finns det dessutom andra lösningar.

Definition 4.5. Låt A vara en m/n-matris. Mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs.

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}\,,$$

kallas *nollrummet* till matrisen A.

Sats 4.3. *Nollrummet $N(A)$ till en m/n-matris är ett underrum av $\mathbf{R}^n$.*

Bevis. Antag att $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är vektorer i $N(A)$ och låt $\lambda \in \mathbf{R}$ vara godtyckligt. Då är $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, och därmed är

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{och} \\ A(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Alltså är $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N(A)$ och $\lambda\mathbf{x} \in N(A)$, varför $N(A)$ är ett underrum (av $\mathbf{R}^n$). $\Diamond$

Exempel 4.9. Nollrummet till en matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

kan framställas i form av ett spann genom att man löser ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Först överförs räkneschemat i reducerad echelonform:

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -6/5 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fria variablerna ges godtyckliga värden, $x_3 = s$, $x_4 = t$, och lösningen skrivs ut slutgiltigt i vektorform:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{3}{5}s - \tfrac{3}{5}t \\ x_2 &= \tfrac{6}{5}s + \tfrac{1}{5}t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}, \qquad \text{dvs.} \quad \mathbf{x} = \frac{s}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En vektor $\mathbf{x}$ är alltså i $N(A)$ om och endast om den är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (\,-3 \quad 6 \quad 5 \quad 0\,)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (\,-3 \quad 1 \quad 0 \quad 5\,)^T$. Alltså är

$$N(A) = \operatorname{spn}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Strukturen hos lösningen till ett system

Ett exempel visar den allmänna strukturen hos mängden av lösningar till ett system:

Exempel 4.10. Betrakta systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi löser systemet med hjälp av basoperationer och finner den reducerade echelonformen,

$$(A \mid \mathbf{b}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Variablerna x_2 och x_4 är fria och ges godtyckliga värden, $x_2 = s$ och $x_4 = t$, och vi avläser att

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 3s - t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1 - \tfrac{1}{3}t \\ x_4 &= t. \end{aligned}$$

I vektorform blir detta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Om vi skriver lösningen $\mathbf{x}$ i den mer hanterliga formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{y}_1 + t\mathbf{y}_2$, så representerar linjärkombinationen $s\mathbf{y}_1 + t\mathbf{y}_2$ vilket som helst element i $N(A)$, dvs. en godtycklig lösning (den allmänna lösningen) till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (om $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ så blir ju $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$). Den första termen $\mathbf{x}_0$ är en speciell lösning (en partikulärlösning) till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som fås då man sätter $s = 0$ och $t = 0$. Mängden $\mathbf{x}_0 + N(A)$ av alla lösningar är alltså underrummet $N(A)$ förskjutet bort från origo O med hjälp av en vektor $\mathbf{x}_0$:

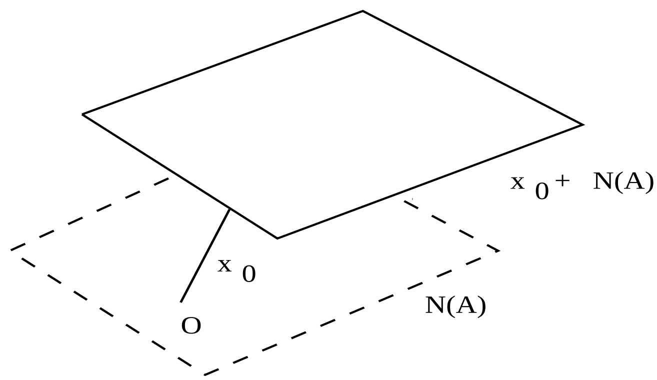

fig. 1

Denna struktur återkommer hos mängden an lösningar till varje ekvationssystem men låt oss först slå fast definitionerna:

Definition 4.6. Med den *allmänna lösningen* till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avses ett lösningsuttryck innehållande parametrar $s, t, \ldots$, sådant att **alla** lösningar till ekvationen kan fås genom att man varierar dessa parametrars värden. En *partikulärlösning* är någon speciell lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sats 4.4. *Den allmänna lösningen till en konsistent ekvationen* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *har formen* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, *där* $\mathbf{x}_0$ *är någon* (vilken som helst) *partikulärlösning till* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *och* $\mathbf{y}$ *är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. Det framgår av lösningsproceduren (se exempel 4.10) att varje lösning har den form som satsen anger. För att vi skall se att partikulärlösningen $\mathbf{x}_0$ kan vara vilken lösning som helst till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, byter vi ut $\mathbf{x}_0$ mot en annan partikulärlösning $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_1$ ($\mathbf{y}_1 \in N(A)$) genom att skriva uttrycket för $\mathbf{x}$ i formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$, där $\mathbf{y} - \mathbf{y}_1$ nu är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\diamondsuit$

Linjärt beroende och oberoende

Exempel 4.11. Betrakta t.ex. vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = (\,1 \quad -1 \quad 2\,)\,, \quad \mathbf{a}_2 = (\,1 \quad 1 \quad 0\,)\,, \quad \mathbf{a}_3 = (\,2 \quad 0 \quad 2\,)$$

i $\mathbf{R}^3$. Mellan dessa gäller ett linjärt samband i den meningen att $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, vilket också kan skrivas $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Dessa vektorer sägs därför vara linjärt beroende (av varandra).

Definition 4.7. Vektorer $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_p$ i ett vektorrum E (eller mängden $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ av dessa vektorer) är *linjärt beroende* om det existerar ett linjärt samband

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0}\,, \tag{1}$$

där minst en av koefficienterna c_i är **olik noll**. Vektorerna är *linjärt oberoende* om de inte är linjärt beroende. Detta innebär att (1) inte kan gälla med mindre än att alla koefficienterna är noll:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \text{ är linjärt oberoende om och endast om} \\ \\ c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0\,. \end{array} \right. \tag{2}$$

Om vektorerna $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_p$ är linjärt beroende så gäller (1), där minst en av koefficienterna är olik noll. Om t.ex. $c_p \neq 0$ så är

$$\mathbf{a}_p = -\frac{c_1}{c_p}\mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{c_{p-1}}{c_p}\mathbf{a}_{p-1}\,,$$

dvs. en linjärkombination av de andra vektorerna. Detta gäller generellt: **Om vektorerna $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_p$ är linjärt beroende så gäller om $p > 1$, att minst en av vektorerna är en linjärkombination av de andra, och om $p = 1$, att $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$.**

Exempel 4.12. Då vi skall undersöka om ett antal vektorer

$$\mathbf{a}_1 = (\,1 \quad 1 \quad 1\,)\,, \quad \mathbf{a}_2 = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)\,, \quad \mathbf{a}_3 = (\,0 \quad 2 \quad 1\,)\,,$$

är linjärt beroende eller oberoende använder vi oss av ekvation (1) (för $p = 3$),

$$c_1\,(\,1 \quad 1 \quad 1\,) + c_2\,(\,1 \quad 0 \quad 1\,) + c_2\,(\,0 \quad 2 \quad 1\,) = \mathbf{0}\,,$$

som vi betraktar som en homogen ekvation med obekanta c_1, c_2, c_3. Vi skall undersöka om denna ekvation har icke-triviala lösningar eller inte. Om vi skriver ut ekvationen som ett system, får vi

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 \qquad\;\; = 0 \\ c_1 \qquad + 2c_3 = 0\;, \\ c_1 + c_2 + \;\; c_3 = 0 \end{array}$$

dvs. räkneschemat blir den matris $(\mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{a}_2^T \quad \mathbf{a}_3^T)$, som består av de kolonner som man får då de ursprungliga radvektorerna transponeras. Allmänt gäller: **Då man undersöker det linjära beroendet och oberoendet hos vektorer i $\mathbf{R}^n$ är det naturligt och tillrådligt att alltid placera de ifrågavarande vektorerna som kolonner i en matris** oberoende av om de från början är givna som kolonnvektorer eller radvektorer. Vi överför räkneschemat på echelonform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

och ser att det inte finns några fria variabler. Således är den triviala lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ den enda, vilket betyder att vektorerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ är linjärt oberoende.

Exempel 4.13. Vektorerna $(1 \quad 2 \quad -1)^T$, $(2 \quad -1 \quad 8)^T$ och $(-1 \quad 3 \quad -9)^T$ är linjärt beroende: Då vi bildar ett räkneschema med dessa som kolonner, får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 8 & -9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom det finns en fri variabel, är vektorerna linjärt beroende. Om vi explicit vill räkna ut koefficienterna c_i $(i = 1, 2, 3)$ i det linjära beroendet, fortsätter vi till den reducerade echelonformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sätter $c_3 = s$, eftersom denna variabel är fri, och får att $c_1 = -s$ och $c_2 = s$. Till slut kan vi välja $s = 1$ eller något annat värde olikt noll.

Exempel 4.14. Mängden $\{\mathbf{0}\}$ av enbart nollvektorn är linjärt beroende, ty $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Allmännare gäller att en mängd $\{\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ av vektorer, där nollvektorn ingår, är linjärt beroende, eftersom

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{0}.$$

Exempel 4.15. Matriserna $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende i vektorrummet av alla 2/2-matriser, ty ekvationen

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är ekvivalent med ekvationssystemet $c_1 + 3c_2 = 0$, $2c_2 = 0$, $2c_1 = 0$, $3c_1 + c_2 = 0$, som har den enda lösningen $c_1 = c_2 = 0$.

Exempel 4.16. Funktionerna $f_1(x) = e^x$ och $f_2(x) = x$ i vektorrummet $\mathcal{M}$ av alla funktioner definierade på $\mathbf{R}$ är linjärt oberoende: Ekvation (1), som nu har formen

$$c_1 e^x + c_2 x = 0\,,$$

skall tolkas som en likhet som gäller för varje värde på x, eftersom nollan i högerledet i detta fall representerar nollfunktionen. Likheten bör alltså gälla speciellt för t.ex. $x = 0$ och $x = 1$, vilket ger ekvationssystemet $c_1 = 0$, $ec_1 + c_2 = 0$, som har den enda lösningen $c_1 = c_2 = 0$.

Definition 4.8. Två vektorer $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ i ett vektorrum sägs vara *parallella* om de är linjärt beroende.

Om $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ är parallella, är $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, där minst en av koefficienterna är olik noll. Om $c_1 \neq 0$, är $\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{a}_2$ en multipel av $\mathbf{a}_2$. Om igen $c_2 \neq 0$, är $\mathbf{a}_2$ en multipel av $\mathbf{a}_1$. **Två vektorer är alltså parallella om och endast om den ena är en multipel av den andra**.

En liknande geometrisk tolkning har vi för t.ex. tre vektorer i $\mathbf{R}^3$: **Tre vektorer $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende om och endast om alla befinner sig i ett och samma plan innehållande origo**. En av dem, t.ex. $\mathbf{a}_3$, är nämligen då en linjärkombination av de två andra, dvs. ligger i spannet av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$, som i sin tur är en delmängd av ett plan genom origo.

Sats 4.5. *Om $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ är vektorer i $\mathbf{R}^m$ och om $k > m$ så är dessa vektorer linjärt beroende.*

Bevis. Vi kan anta att vektorerna $\mathbf{a}_i$ är kolonnvektorer (i annat fall transponerar vi!) och sätter $A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_k\,)$. Då är ekvationen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ekvivalent med den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som enligt Sats 1.3 har icke-triviala lösningar. Satsens påstående gäller alltså. $\diamondsuit$

Om rader och kolonner i en echelonmatris

I detta avsnitt visar vi att de så kallade pivotkolonnerna och -raderna i en echelonmatris är linjärt oberoende.

Definition 4.9. *Radrummet* till en matris A är spannet av raderna i A. För radrummet använder vi beteckningen $R(A^T)$ på grund av att radrummet för A vid transponering förvandlas till kolonnrummet för A^T.

Låt först U vara en uppåt triangulär n/n-matris med n pivotelement:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{där} \quad u_{ii} \neq 0 \quad \text{för} \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Då är U icke-singulär, dvs. U:s kolonner $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... $\mathbf{u}_n$ är linjärt oberoende.

Vi skall visa att också U:s rader $\overline{\mathbf{u}}_1$, $\overline{\mathbf{u}}_2$, ...,$\overline{\mathbf{u}}_n$ är linjärt oberoende: Den transponerade matrisen

$$U^T = (\,\overline{\mathbf{u}}_1^T \quad \overline{\mathbf{u}}_2^T \quad \ldots \quad \overline{\mathbf{u}}_n^T\,)$$

är en nedåt triangulär matris, vars diagonalelement är olika noll. Vi gör en serie framåtsubstitutioner och får att $U^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Följaktligen är U^T ickesingulär och kolonnerna i denna matris därför linjärt oberoende. Men då är också de transponerade kolonnerna, dvs. $\overline{\mathbf{u}}_1$, $\overline{\mathbf{u}}_2$, …,$\overline{\mathbf{u}}_n$, linjärt oberoende (en undersökning av det linjära beroendet leder ju i bägge fallen till samma ekvationssystem). Alltså gäller: **Både rader och kolonner i U är linjärt oberoende**.

Vad kan vi säga om det linjära beroendet eller oberoendet hos rader och kolonner i en echelonmatris? Låt oss ta ett numeriskt exempel:

Exempel 4.17. Betrakta echelonmatrisen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vill utnyttja det som vi ovan kom till rörande uppåt triangulära matriser (och vill ha enklare beteckningar). Därför flyttar vi om kolonnerna så att de tre pivotkolonnerna (= de kolonner som innehåller pivotelement) kommer först:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & 2 \\ .. & .. & .. & : & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (\,\overline{\mathbf{u}}_1 \quad \overline{\mathbf{v}}_1\,) \\ (\,\overline{\mathbf{u}}_2 \quad \overline{\mathbf{v}}_2\,) \\ (\,\overline{\mathbf{u}}_3 \quad \overline{\mathbf{v}}_3\,) \\ \\ \\ \end{array}$$

Uppe i det vänstra hörnet av U_1 får vi då ett uppåt triangulärt block T. Längst till höger har vi infört beteckningar $(\,\overline{\mathbf{u}}_i \quad \overline{\mathbf{v}}_i\,)$ för de tre första raderna, där $\overline{\mathbf{u}}_i$ och $\overline{\mathbf{v}}_i$ är den del av raden som är till vänster respektive höger om den prickade linjen. På samma sätt inför vi beteckningar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

för de tre första kolonnerna i U_1. Omflyttning av kolonner påverkar inte kolonners eventuella linjära beroende eller oberoende, ty dessa egenskaper är oberoende av ordningsföljden. Inte heller den resulterande omnumreringen av radernas komponenter påverkar raders eventuella linjära beroende eller oberoende.

I det uppåt triangulära blocket T är raderna $\overline{\mathbf{u}}_i$ och kolonnerna $\mathbf{u}_i$ linjärt oberoende. Men då är också de tre första raderna och de tre första kolonnerna i U_1 linjärt oberoende, ty t.ex. ekvationen

$$c_1\,(\,\overline{\mathbf{u}}_1 \quad \overline{\mathbf{v}}_1\,) + c_2\,(\,\overline{\mathbf{u}}_2 \quad \overline{\mathbf{v}}_2\,) + c_3\,(\,\overline{\mathbf{u}}_3 \quad \overline{\mathbf{v}}_3\,) = (\,\mathbf{0} \quad \mathbf{0}\,)$$

sönderfaller i två ekvationer

$$\begin{aligned} c_1\overline{\mathbf{u}}_1 + c_2\overline{\mathbf{u}}_2 + c_3\overline{\mathbf{u}}_3 &= \mathbf{0} \\ c_1\overline{\mathbf{v}}_1 + c_2\overline{\mathbf{v}}_2 + c_3\overline{\mathbf{v}}_3 &= \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

av vilka redan den första ger att $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (en förlängning av linjärt oberoende vektorer med extra komponenter kan alltså bara göra vektorerna "mera oberoende").

Allmänt fås på detta sätt:

Sats 4.6. *Antag att U är en echelonmatris med r pivotelement. Då gäller:*

(*i*) *De r pivotkolonnerna i U är linjärt oberoende i kolonnrummet $R(U)$;*
(*ii*) *De r pivotraderna i U är linjärt oberoende i radrummet $R(U^T)$.*

Baser, koordinater och dimension

De *naturliga enhetsvektorerna*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^3$ är linjärt oberoende eftersom matrisen $(\,\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3\,) = I$ är icke-singulär. Dessutom uppspänner dessa vektorer hela $\mathbf{R}^3$, ty varje $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,) \in \mathbf{R}^3$ är en linjärkombination

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\,.$$

Dessa två egenskaper tar vi som definition på begreppet bas i ett vektorrum E:

Definition 4.10. En mängd $\{\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2, \dots,\, \mathbf{a}_n\}$ av vektorer $\mathbf{a}_i \in E$ är en *bas* i E, om

(*i*) vektorerna $\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, ,\dots,\, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende
(*ii*) och $\operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, ,\dots,\, \mathbf{a}_n\} = E$.

Alternativt kan vi säga att vektorerna $\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2, \dots,\, \mathbf{a}_n$ bildar (eller utgör) en bas i E. Vektorerna $\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2, \dots,\, \mathbf{a}_n$ i basen kallas *basvektorer*.

Exempel 4.18. Vi undersöker om vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (\,1 \quad 1 \quad 2\,), \quad \mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 2 \quad 1\,), \quad \mathbf{v}_3 = (\,3 \quad 1 \quad 1\,)$$

bildar en bas i $\mathbf{R}^3$. Först det linjära oberoendet: Vi sätter $V = (\,\mathbf{v}_1^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad \mathbf{v}_3^T\,)$. Då är ekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ ekvivalent med $V\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och motsvarande kalkyler,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

visar att fria variabler saknas. Således är vektorerna linjärt oberoende.

För att påvisa att $\operatorname{spn}\{\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3\} = \mathbf{R}^3$, bör vi i princip lösa $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$, dvs. $V\mathbf{x} = \mathbf{b}^T$, för varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. Om en lösning existerar för varje $\mathbf{b}$ så omfattar spannet av vektorerna $\mathbf{v}_i$ hela $\mathbf{R}^3$. Existensen av en lösning är emellertid garanterad, eftersom V är icke-singulär (enligt kalkylen ovan) och därmed inverterbar:

$$V\mathbf{x} = \mathbf{b}^T \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = V^{-1}\mathbf{b}^T .$$

Den senare delen av exemplet ovan **behöver** i praktiken **aldrig utföras** på grund av följande sats, som bevisas ungefär som i exemplet:

Sats 4.7. *Om* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ *är* n *stycken linjärt oberoende vektorer i* $\mathbf{R}^n$ *så bildar dessa vektorer en bas i* $\mathbf{R}^n$*.*

Bevis. Om vi sätter $A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\,)$, så är A en kvadratisk, icke-singulär matris. Alltså existerar A^{-1}. För varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, dvs. $\mathbf{b}$ är en linjärkombination

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in \operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} .$$

Således bildar $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_n$ en bas i $\mathbf{R}^n$. $\diamondsuit$

Antag att E är ett vektorrum och att $\mathbf{b}_1$, …, $\mathbf{b}_n$ utgör en bas i E.

Definition 4.11. För ett givet $\mathbf{x} \in E$ kallas talen x_1, …, x_n *koordinaterna* för $\mathbf{x}$ i basen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

Sats 4.8. *Om* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *är en bas i ett vektorrum* E*, så är koordinaterna för ett givet* $\mathbf{x} \in E$ *entydiga.*

Bevis. Antag att både x_1, …, x_n och y_1, …, y_n är koordinater för ett givet $\mathbf{x}$ i den givna basen. Då är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \\ \mathbf{x} &= y_1\mathbf{b}_1 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n , \end{aligned}$$

vilket leder till att

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (x_1 - y_1)\mathbf{b}_1 + \cdot + (x_n - y_n)\mathbf{b}_n .$$

Eftersom basvektorerna är linjärt oberoende, är alla koefficienterna i linjärkombinationen i högerledet noll, dvs. $x_1 = y_1$, …, $x_n = y_n$. $\diamondsuit$

Exempel 4.19. Antag att vi fått som uppgift att både visa att vektorerna

$$\mathbf{b}_1 = (\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T , \quad \mathbf{b}_2 = (\,0 \quad 2 \quad 1\,)^T , \quad \mathbf{b}_3 = (\,1 \quad 0 \quad 2\,)^T$$

bildar en bas i $\mathbf{R}^3$ och att bestämma koordinaterna för $\mathbf{a} = (\,5 \quad 5 \quad 8\,)^T$ i denna bas. Då kan dessa två uppgifter lösas **samtidigt** på följande sätt: Vi löser det ekvationssystem som svarar mot räkneschemat $(\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad | \quad \mathbf{a}\,)$ och ser redan då vi har nått någon echelonform,

$$(\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad | \quad \mathbf{a}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 1 & 2 & 0 & | & 5 \\ 1 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{pmatrix} ,$$

att inga variabler är fria, varför vektorerna $\mathbf{b}_i$ är linjärt oberoende. Eftersom vi nu har tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^3$ så bilder dessa en bas i $\mathbf{R}^3$ enligt Sats 4.7. För att få fram koordinaterna för $\mathbf{a}$, fortsätter vi tills vi har en reducerad echelonmatris och kan då avläsa dessa: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Exempel 4.20. Vi skall visa att polynomen

$$1, \quad x, \quad x^2, \dots, \quad x^n$$

bildar en bas i vektorrummet P_n av alla polynom av högst graden n. Eftersom varje polynom p i P_n har formen

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n ,$$

är det klart att de givna polynomen uppspänner hela P_n. Vi behöver alltså bara visa att de också är linjärt oberoende. För detta ändamål sätter vi en linjärkombination av dem lika med nollfunktionen:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0 .$$

Denna likhet gäller för varje x, alltså speciellt också för $x = 0$, vilket ger att $c_0 = 0$. Således är

$$x(c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}) = 0$$

för varje x, dvs.

$$c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} = 0$$

för varje $x \neq 0$. Men polynom är kontinuerliga, så polynomet $c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$ i vänsterledet måste vara noll också för $x = 0$, vilket ger att $c_1 = 0$ osv. Ett antal upprepningar av detta resonemang ger att $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ (strängt taget borde man använda induktion!). De givna polynomen bildar alltså en bas i P_n.

Nästa sats visar att antalet vektorer i en bas är entydigt:

Sats 4.9. *Om både vektorerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ och vektorerna $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$ bildar baser i ett vektorrum E, så är $m = n$.*

Bevis. Antag som en **antites** att det motsatta gäller, t.ex. att $m < n$ (om $m > n$ kan man låta de två baserna byta plats i beviset). Vi skall visa att detta antagande leder till en motsägelse. Varje vektor $\mathbf{b}_i$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki} \mathbf{a}_k \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Sätt $B = (\beta_{ki})$. Då har det homogena systemet $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ icke-triviala lösningar enligt Sats 1.3, ty antalet rader m är mindre än antalet obekanta n. Men å andra sidan kan vi bevisa det motsatta genom att sluta oss till att systemet bara kan ha den triviala lösningen:

$$
\begin{aligned}
B\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} x_i = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \\
&\Longrightarrow \quad \mathbf{0} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} x_i \right) \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ki} \mathbf{a}_k \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i \\
&\Longrightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0 \,,
\end{aligned}
$$

där vi för den sista implikationen har utnyttjat att $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende. Men detta är en motsägelse. På grund av detta måste vi dra slutsatsen att $m = n$. $\diamondsuit$

Antalet vektorer i en bas är enligt Sats 4.9 ett tal som karakteriserar ett visst vektorrum. Vi inför därför följande definition:

Definition 4.12. Med *dimensionen*, $\dim E$, hos ett vektorrum E menas antalet vektorer i en bas i E.

Anmärkning. Man kan visa att varje vektorrum $E \neq \{\mathbf{0}\}$ har en bas, ändlig eller oändlig. Oändliga baser definieras på samma sätt som ändliga. Skillnaden är bara att med en linjärkombination av en oändlig mängd av vektorer avses en linjärkombination av någon ändlig delmängd av denna. Om ett vektorrum E har en oändlig bas, säger man att E är oändligtdimensionellt och skriver att $\dim E = \infty$.

Exempel 4.22. Tydligen är

$$\dim \mathbf{R}^n = n \,,$$

eftersom de naturliga enhetsvektorerna $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bildar en bas i $\mathbf{R}^n$, och

$$\dim P_n = n + 1 \,,$$

eftersom polynomen 1, x, x^2, $\ldots$, x^n bildar en bas i P_n. Vektorrummet P av alla polynom, liksom vektorrummet av alla funktioner, måste vara oändligtdimensionellt, eftersom den oändliga mängden av alla potenser x^n av x är linjärt oberoende.

I beviset av Sats 4.9 utnyttjade vi inte alla antaganden i satsen efter att antitesen var gjord: Vi använde oss bara av att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ uppspänner E och att $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende. Precis samma slag av resonemang ger oss därför följande generalisering av Sats 4.7:

Sats 4.10. *Om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum E och $\dim E = m$, så bildar $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ en bas i E.*

Bevis. Antag som en antites att $\operatorname{spn}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\} \neq E$ så att vi kan välja en vektor $\mathbf{b}_{m+1} \in E$ utanför det nämnda spannet. Då är $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m+1}$ linjärt oberoende (enligt uppgift 14 (a)). Beviset för föregående sats (med $n = m + 1$) ger nu en motsägelse. Alltså är $\operatorname{spn}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\} = E$, dvs. $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ är en bas. $\diamondsuit$

Exempel 4.21. Vi skall visa att polynomen

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 \,, \quad p_2(x) = 1 + 2x + x^2 \,, \quad p_3(x) = 2 + x \,,$$

bildar en bas i vektorrummet P_2 av polynom av högst graden 2. Eftersom vi redan vet att de tre polynomen 1, x och x^2 bildar en bas, räcker det enligt Sats 4.10 att visa att p_1, p_2 och p_3 är linjärt oberoende. Vi undersöker därför ekvationen

$$\begin{aligned} 0 &= c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) \\ &= (c_1 + c_2 + 2c_3) + (c_1 + 2c_2 + c_3)x + (c_1 + c_2)x^2 , \end{aligned}$$

som gäller för varje x om och endast om ekvationssystemet

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

är satisfierat. En kalkyl med motsvarande räkneschema visar att den triviala lösningen är den enda. Således bildar p_1, p_2 och p_3 en bas i P_2.

Bas och dimension för kolonn- och radrum

Låt oss återkalla i minnet att om A är en matris så är kolonnrummet $R(A)$ spannet av A:s kolonner, radrummet $R(A^T)$ spannet av A:s rader samt nollrummet $N(A)$ vektorrummet av alla lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vi kommer nu att härleda algoritmer som ger baser i $R(A)$, $R(A^T)$ och $N(A)$. För kolonn- och radrummens del kommer vi att stöda oss på Sats 4.6. Vi börjar med den algoritm, som ger en bas i $R(A^T)$:

Sats 4.11. *Antag att A är en m/n-matris och antag att vi med hjälp av basoperationer har transformerat A till någon echelonform U. Då gäller:*

(*i*) *Matriserna A och U har samma radrum;*
(*ii*) *Pivotraderna i U bildar en bas i radrummet $R(A^T)$.*

Bevis. (*i*) Låt

$$X = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1 \\ : \\ \overline{\mathbf{x}}_m \end{pmatrix} \quad \overset{BO}{\longrightarrow} \quad Y = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{y}}_1 \\ : \\ \overline{\mathbf{y}}_m \end{pmatrix}$$

vara en godtycklig användning av en basoperation i kedjan $A \to \cdots \to U$. Då är varje $\overline{\mathbf{y}}_j$ en linjärkombination av vektorerna $\overline{\mathbf{x}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_m$, ty varje användning av en basoperation innebär att man bildar en (enkel) linjärkombination av rader. Eftersom alla basoperationer är omvändbara, gäller också det omvända: Varje vektor $\overline{\mathbf{x}}_j$ är en linjärkombination av $\overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_m$. Ur detta följer att

$$\operatorname{spn}\{\overline{\mathbf{x}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_m\} = \operatorname{spn}\{\overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_m\} ,$$

dvs. att X och Y har samma radrum. Då detta gäller för varje länk i kedjan från A till U, är $R(A^T) = R(U^T)$.

(*ii*) Det är klart att pivotraderna i U bildar en bas i $R(U^T) = R(A^T)$, ty de är linjärt oberoende enligt Sats 4.6 och uppspänner hela radrummet, eftersom de övriga raderna i U är $\mathbf{0}$. $\diamondsuit$

Exempel 4.23. Om vi överför matrisen A nedan till en echelonmatris,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,,$$

så ser vi att U har pivotelement i de två första raderna, som alltså bildar en bas

$$\{(\,1 \quad 1 \quad -1\,)\,,\,(\,0 \quad -1 \quad 4\,)\}$$

i $R(A^T)$. Observera att vi kan använda vilken echelonform som helst. Om vi använder t.ex. den reducerade echelonformen, hittar vi en annan bas i $R(A^T)$.

Lägg märke till att vektorerna skall tas ur U, inte ur A. Vi ger ett motexempel:

Exempel 4.24. Sats 4.11 ger på basen av kalkylen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,,$$

att den första raden i U bildar en bas $\{(\,1 \quad 0\,)\}$ i $R(A^T)$. Däremot bildar inte den första raden i A någon bas i $R(A^T)$, ty den är ju linjärt beroende.

För kolonnrummet $R(A)$ har vi en något annorlunda algoritm för konstruktion av en bas. Orsaken är att matrisen A och en motsvarande echelonmatris U i regel har olika kolonnrum. Detta i sin tur sammanhänger med att basoperationerna är radoperationer, inte kolonnoperationer.

Sats 4.12. *Låt A vara en m/n-matris och antag att vi med hjälp av basoperationerna transformerat A till någon echelonmatris U. Då bilder de kolonner i A, som har* samma nummer *som pivotkolonnerna i U, en bas i kolonnrummet $R(A)$.*

Bevis. Vi inför beteckningar för kolonnerna i A och U:

$$\begin{aligned} A &= (\,\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\,)\,, \\ U &= (\,\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n\,)\,. \end{aligned}$$

Echelonmatrisen U fås genom multiplikation från vänster med (i tur och ordning) matriser E_1, E_2, …, E_p, som svarar mot basoperationer. Om vi sätter $E = E_p \cdots E_1$ så är E inverterbar och

$$\begin{aligned} U &= EA\,, \\ \mathbf{u}_i &= E\mathbf{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Antag att U innehåller r pivotkolonner. Vi kan anta att de r första, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, råkar vara pivotkolonner. Om inte så kan vi ju temporärt numrera om kolonnerna!

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & & \mathbf{u}_r & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} P & * & .. & * & * & .. & * \\ & P & .. & * & * & .. & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & P & * & .. & * \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(Här betecknar P ett pivotelement). Då är dessa r pivotkolonner linjärt oberoende enligt Sats 4.6. Vilken som helst av de övriga kolonnerna, säg $\mathbf{u}_k$ $(k > r)$, är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, ty $\mathbf{u}_k$ kan betraktas som ett högerled i ett räkneschema $(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r \mid \mathbf{u}_k)$ och bakåtsubstitution ger då koefficienterna i linjärkombinationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_r\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_k \, .$$

Alltså är $R(U) = \operatorname{spn}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \operatorname{spn}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$, dvs. $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ är en bas i $R(U)$.

Då vi nu vet att pivotkolonnerna i U bildar en bas i $R(U)$, kan vi använda (3) till att visa att motsvarande kolonner i A, dvs. $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, bildar en bas i $R(A)$. Först det linjära oberoendet: Om vi multiplicerar ekvationen

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

från vänster med matrisen E och beaktar (3), får vi

$$\mathbf{0} = c_1E\mathbf{a}_1 + \cdots + c_rE\mathbf{a}_r = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r \, ,$$

vilket ger att $c_1 = \cdots = c_r = 0$ då ju $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ är linjärt oberoende. För att visa att spannet av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ är hela $R(A)$, tar vi en godtycklig vektor $\mathbf{x} \in R(A)$. Då är $E\mathbf{x} \in R(U)$, enligt (3), och kan därför skrivas som en linjärkombination

$$E\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{u}_r \, .$$

Således är $\mathbf{x} = \alpha_1E^{-1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_rE^{-1}\mathbf{u}_r = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{a}_r$. Varje vektor $\mathbf{x} \in R(A)$ finns alltså i $\operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ och satsen är därmed bevisad. $\diamondsuit$

Definition 4.13. *Rangen* hos en matris A är dimensionen $\dim R(A)$ hos kolonnrummet. Dimensionen hos nollrummet, $\dim N(A)$, sägs vara A:s *defekt* (eller nolldefekt).

Enligt satserna 4.11 och 4.12 är

$$\dim R(A) = \dim R(U) = \#(\text{pivotelement}) = \dim R(A^T) \, .$$

Följaktligen gäller:

Sats 4.13. *A och A^T har samma rang för varje matris A.*

Med hjälp av detta kan vi skriva ut en stor mängd påståenden, som alla är ekvivalenta med att en n/n-matris A är inverterbar:

$$\begin{array}{ccccc} A \text{ inverterbar} & \Leftrightarrow & A \text{ icke-singulär} & \Leftrightarrow & \dim N(A) = 0 \\ & & \Updownarrow & & \\ & & \dim R(A) = n & & \\ & & \Updownarrow & & \\ & & \dim R(A^T) = n & & \\ & & \Updownarrow & & \\ A^T \text{ inverterbar} & \Leftrightarrow & A^T \text{ icke-singulär} & \Leftrightarrow & \dim N(A^T) = 0\,. \end{array}$$

Exempel 4.25. Som ett exempel på hur man använder Sats 4.12 betraktar vi en matris A och en echelonform U av denna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,.$$

Eftersom den första och den tredje kolonnen i U är pivotkolonner, bildar den första och den tredje kolonnen i A en bas i $R(A)$:

$$\{(1 \quad 2 \quad -1)^T, (3 \quad 9 \quad 3)^T\}\,.$$

Anmärkning. (i) Man kan naturligtvis använda (t.ex.) proceduren för att bestämma en bas i ett radrum till att bestämma en bas i $R(A)$ genom att helt enkelt tillämpa den på matrisen A^T i stället för A.

(ii) En bas i ett vektorrum är ju alltid precis detsamma som en **maximal mängd av linjärt oberoende vektorer** i ett vektorrum. Om man bland ett antal givna vektorer i $\mathbf{R}^n$ vill välja en bas i spannet av dem, skriver man därför vektorerna som **kolonner** i en matris A och använder Sats 4.12 till att bestämma en bas i $R(A)$, som ju är spannet av de givna vektorerna.

Sambandet mellan rang och defekt

Först kan vi konstatera att den procedur som vi använde i exempel 4.9 för att skriva ett nollrum som ett spann, i själva verket alltid ger en bas i nollrummet:

Exempel 4.26. Matrisen A överförs i reducerad echelonform

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

de fria variablerna ges godtyckliga värden, $x_2 = s$ och $x_4 = t$, varefter lösningen först skrivs ut komponentvis

$$\begin{aligned} x_1 &= -3s + 13t \\ x_2 &= \quad s \\ x_3 &= \qquad\; - 4t \\ x_4 &= \qquad\quad\;\; t \end{aligned}$$

och sedan i vektorform

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1^* \\ 0 \\ 0^* \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 13 \\ 0^* \\ -4 \\ 1^* \end{pmatrix} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \,.$$

De komponenter som svarar mot de fria variablerna har här försetts med en stjärna. Nollrummet är nu spannet av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ men dessa vektorer är också linjärt oberoende, ty ekvationen $s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ ger direkt att $s = t = 0$ då vi utnyttjar de stjärnförsedda komponenterna som svarar mot fria variabler. Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ bildar alltså en **bas** i $N(A)$.

Generellt gäller precis som i vårt exempel, att $\dim N(A) = \#(\text{fria variabler})$ så att

$$\begin{array}{r} \dim R(A) = \#(\text{pivotkolonner}) \\ \dim N(A) = \#(\text{icke-pivotkolonner}) \\ \hline \dim R(A) + \dim N(A) = \#(\text{kolonner})\,. \end{array}$$

Sats 4.14. *Antag att A är en m/n-matris. Då gäller:*

(*i*) $\dim R(A) + \dim N(A) = n\,;$

(*ii*) *En bas $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ i nollrummet $N(A)$ fås genom att man i lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,*

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_p\mathbf{v}_p\,,$$

i tur och ordning sätter en *fri variabel s_i lika med* 1 *medan de övriga får värdet* 0.

Om man enbart skall bestämma defekten hos en matris A, räcker det att överföra A i echelonform. Antalet fria variabler anger då antalet vektorer i en bas i $N(A)$, dvs. defekten. Antalet basvariabler anger på samma sätt matrisens rang.

Exempel 4.27. För matrisen A nedan, fås en echelonform med två fria variabler och två basvariabler:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Således är både defekten och rangen likamed 2.

Vänsternollrum. Matriser med rangen ett

Vi har redan sett att kolonnrummet $R(A^T)$ till den transponerade matrisen A^T på ett naturligt sätt (via transponering) kan identifieras med radrummet till A. Då det gäller nollrummet till A^T, får vi genom transponering:

$$A^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A^T\mathbf{x})^T = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}\,.$$

Detta ger anledning till följande benämning:

Definition 4.14. *Vänsternollrummet* till en m/n-matris A är mängden

$$N(A^T) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}\}\,.$$

Denna är identisk med nollrummet till A^T och är alltså ett underrum av $\mathbf{R}^m$.

Med varje m/n-matris har vi nu associerat fyra underrum, kolonnrummet, radrummet, nollrummet och vänsternollrummet, av vilka det sistnämnda är det minst viktiga. Om A har rangen r så gäller sammanfattningsvis:

$R(A)$	A:s kolonnrum;	dimensionen $= r$
$R(A^T)$	A:s radrum;	dimensionen $= r$
$N(A)$	A:s nollrum;	dimensionen $= n - r$
$N(A^T)$	A:s vänsternollrum;	dimensionen $= m - r$

Vi skall nu undersöka "strukturen" hos en m/n-matris

$$A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\,)$$

med rangen 1. Någon av kolonnerna, t.ex. $\mathbf{b} = \mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$, bildar en bas i $R(A)$. Varje $\mathbf{a}_i$ är alltså en linjärkombination $\mathbf{a}_i = c_i\mathbf{b}$ av $\mathbf{b}$, dvs.

$$A = (\,c_1\mathbf{b} \quad \cdots \quad c_n\mathbf{b}\,) = \mathbf{b}\,(\,c_1 \quad \cdots \quad c_n\,) = \mathbf{bc}\,,$$

där $c_i \neq 0$ för minst ett i (annars är ju A:s rang noll). Omvänt: Om $A = \mathbf{bc}$, där $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, är en kolonnvektor och $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ är en radvektor är $A = (\,c_1\mathbf{b} \quad \cdots \quad c_n\mathbf{b}\,)$. Men då uppspänns ju $R(A)$ av $\mathbf{b}$ så att $\dim R(A) = 1$.

En matris A har alltså rangen 1 om och endast om $A = \mathbf{bc}$, där $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ är en kolonnvektor och $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ är en radvektor.

Ett liknande resonemang ger att en matris A har rangen 2 om och endast om den har formen $A = \mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$, där $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende kolonnvektorer och $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ är linjärt oberoende radvektorer (och A har rangen 3 om och endast ...)

Exempel 4.28. I matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

som har rangen 1, bildar (t.ex.) första kolonnen $\mathbf{b}$ en bas i $R(A)$ så att

$$A = (\,1\mathbf{b} \quad (1/2)\mathbf{b} \quad (1/2)\mathbf{b}\,) = \mathbf{bc}\,,$$

där $\mathbf{c} = (\,1 \quad 1/2 \quad 1/2\,)$.

Höger- och vänsterinverser

Antag att A är en m/n-matris. För A:s rang $r(A)$ gäller både $r(A) = \dim R(A) \leq n$ och $r(A) = \dim R(A^T) \leq m$, dvs. om $\min(m,n)$ är det mindre av talen m och n, är

$$r(A) \leq \min(m,n)\,. \tag{4}$$

Vi kommer att visa att likhet gäller i denna formel om och endast om matrisen A har en så kallad höger- eller en vänsterinvers. Sådana **ensidiga** inverser definieras på följande sätt:

Definition 4.15. Om $AB = I$ så är B en *högerinvers* till A och A är en *vänsterinvers* till B.

Vi ser av denna definition, att inversen till en kvadratisk matris A är en matris som är både höger- och vänsterinvers till A.

Villkoret för existensen av en högerinvers följer ur nedanstående resonemang, där vi har använt oss av beteckningar för kolonnerna i en (obekant) högerinvers $X = (\,\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_m\,)$ och enhetsmatrisen $I = (\,\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_m\,)$:

$$\begin{aligned}
AX = I_m \text{ är lösbar} \quad &\Leftrightarrow \quad A\,(\,\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_m\,) = (\,\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_m\,) \text{ är lösbar} \\
&\Leftrightarrow \quad A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \text{ är lösbar } (i = 1, \ldots, m) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_i \in R(A) \quad (i = 1, \ldots, m) \\
&\Leftrightarrow \quad R(A) = \mathbf{R}^m \\
&\Leftrightarrow \quad r(A) = \dim R(A) = m\,.
\end{aligned}$$

Ur detta kan vi utläsa nedanstående sats:

Sats 4.15. *För en m/n-matris A är följande påståenden ekvivalenta:*

(*i*) *Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst* en *lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;*
(*ii*) $R(A) = \mathbf{R}^m$;
(*iii*) $r(A) = \dim R(A) = m$;
(*iv*) *A har en högerinvers.*

Observera att enligt (4) är det möjligt att uppfylla (*iii*) bara om $m \leq n$.

För att räkna ut en högerivers till A löser man matrisekvationen $AX = I$ med hjälp av räkneschemat $(A \mid I)$. Detta svarar, som vi har sett i kapitel 3, mot samtidig lösning av m ekvationssystem med samma koefficientmatris A:

Exempel 4.29. Om A är av typen $2/3$ så har en eventuell högerinvers X typen $3/2$, så att om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{så är} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

och de obekanta elementen i X fås ur en reducerad echelonmatris:

$$(A \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & | & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom x_3 och y_3 är fria, sätter vi $x_3 = s$ och $y_3 = t$ och får variablerna x_i genom att beakta den första kolonnen i högerledet och variablerna y_i genom att beakta den andra kolonnen i högerledet:

$$X = \begin{pmatrix} 3-15s & 2-15t \\ -1+6s & -1+6t \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För varje insatt värde på s och t är X en högerinvers och varje högerinvers har denna form.

Vänsterinverser Y till A fås genom att man löser matrisekvationen $YA = I$, som är ekvivalent med $A^TY^T = I$. Vänsterinverser till A svarar alltså (via transponering) mot högerinverser till A^T och tvärtom. Enligt Sats 4.15 och Sats 4.13 har $A^TY^T = I$ en lösning Y^T om och endast om $\dim R(A) = \dim R(A^T) = n$, ty A^T är en n/m-matris. Detta ingår i beviset av nästa sats:

Sats 4.16. *För en m/n-matris A är följande påståenden ekvivalenta:*

- (i) *Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högst* en *lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;*
- (ii) $r(A) = \dim R(A) = n$;
- (iii) *Kolonnerna i A är alla linjärt oberoende;*
- (iv) *A har en vänsterinvers.*

Observera att enligt (4) är det möjligt att uppfylla (ii) bara om $m \geq n$.

Bevis. Vi har just visat att (ii) är ekvivalent med (iv) och dessutom är det uppenbart att (ii) är ekvivalent med (iii). Det räcker alltså att visa att (i) är ekvivalent med (ii):

Enligt Sats 4.4 har alla lösningar till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, där $\mathbf{x}_0$ är en partikulärlösning till denna ekvation och $\mathbf{y}$ är någon lösning till motsvarande homogena ekvation $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ur detta följer:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ har högst en lösning} \quad &\Leftrightarrow \quad A\mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ bara om } \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \#(\text{fria variabler}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \dim R(A) = n\,. \end{aligned}$$

Således är (i) ekvivalent med (ii). $\diamondsuit$

Som vi redan nämnde, så räknar man ut vänsterinverser till en matris A genom att man löser ekvationen $YA = I$ eller rättare sagt det transponerade systemet $A^TY^T = I$ med hjälp av räkneschemat $(A^T \mid I)$, vilket ger Y^T och slutligen Y:

Exempel 4.30. Om A är av typen $3/2$ så bör en eventuell vänsterinvers Y ha typen $2/3$. Detta betyder att om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och om vi sätter} \quad Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

så ger kalkylerna

$$(A^T \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & \mid & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

där vi ser att x_2 och y_2 är fria, vänsterinverserna

$$Y = \begin{pmatrix} 4-2s & s & -1 \\ -3-2t & t & 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbf{R}).$$

Med hjälp av den teori som vi nu har utvecklat, kan vi bevisa att om en kvadratisk matris har en högerinvers så har den också en vänsterinvers och att dessa inverser då är lika:

Sats 4.17. *Antag att A är en m/n-matris och låt A_H och A_V beteckna någon höger- respektive vänsterinvers till A. Då gäller:*

(*i*) *Om både ett A_H och ett A_V existerar, så är $m = n$.*

(*ii*) *Om $m = n$, så existerar ett A_H om och endast om ett A_V existerar och då är*

$$A_H = A_V,$$

dvs. A är inverterbar och $A^{-1} = A_H = A_V$.

Bevis. Med hjälp av satserna 4.15 och 4.16 fås

$$\left.\begin{array}{lcl} A_H \text{ existerar} & \Leftrightarrow & \dim R(A) = m \\ A_V \text{ existerar} & \Leftrightarrow & \dim R(A) = n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

Om $m = n$ och och A_H och A_V existerar, så är $A_H = (A_V A)A_H = A_V(AA_H) = A_V$, eftersom både $A_V A$ och AA_H är enhetsmatriser. $\diamondsuit$

Övningsuppgifter

1. Visa, att $E = \{(\,x_1 \quad x_2\,) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 = 2\}$ med räkneoperationerna definierade genom

$$\begin{aligned} (\,x_1 \quad x_2\,) + (\,y_1 \quad y_2\,) &= (\,x_1 + y_1 - 1 \quad x_2 + y_2 - 1\,), \\ \lambda(\,x_1 \quad x_2\,) &= (\,\lambda x_1 + 1 - \lambda \quad \lambda x_2 + 1 - \lambda\,) \end{aligned}$$

är ett vektorrum.

2. Vilka av följande delmängder av $\mathbf{R}^3$ är underrum då räkneoperationerna är de vanliga:

(*a*) Mängden av vektorer med första komponenten 0?

(*b*) Mängden av vektorer med första komponenten 1?

(*c*) $\{(\,0 \quad 0 \quad 0\,)\}$?

(*d*) $\{(\,b_1 \quad b_2 \quad b_3\,) \mid 3b_1 - b_2 + b_3 = 0\}$?

3. Mängden $\mathbf{R}^\infty = \{(\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots) \mid x_j \in \mathbf{R},\ j = 1, 2, \ldots\}$ är ett vektorrum om

$$(\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots) + (\, y_1 \quad y_2 \quad \cdots) = (\, x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2 \quad \cdots)\ ,$$
$$\lambda(\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots) = (\, \lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots)\ .$$

Vilka av följande delmängder av $\mathbf{R}^\infty$ är underrum:

(a) Mängden av alla följder som innehåller oändligt många nollor (t.ex. $(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots)$)?

(b) Alla följder $(\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots)$ med $x_j = 0$ från och med något index $j = j_0$ (t.ex. $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots)$)?

(c) Alla aritmetiska följder, dvs. sådana för vilka $x_{j+1} - x_j$ har samma värde för varje j?

4. (a) Verifiera att mängden $\mathcal{M}$ av alla funktioner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ med definitionsmängden $[a,\, b]$ är ett vektorrum, då räkneoperationerna definieras som i exempel 4.2.

(b) Verifiera att mängden P_n av alla polynom $p(x)$ av högst graden n är ett vektorrum genom att visa att det är ett underrum av $\mathcal{M}$.

5. Lös ekvationen

$$(\, 0 \quad 2\,) + 3\,(\, t_1 \quad t_2\,) = (\, 3 \quad -1\,)$$

i vektorrummet i uppgift 1.

6. Visa att mängden av de positiva reella talen blir ett vektorrum då räkneoperationerna definieras enligt: Vektoradditionen $x \oplus y$ är vanlig multiplikation xy; multiplikationen $\lambda \top x$ av en skalär λ med en vektor x är potensen x^λ.

7. Undersök om vektorerna

$$(a) \quad (\, 3 \quad 2 \quad 5 \quad 1\,)\,,(\, 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2\,)\,,(\, 1 \quad -1 \quad 2 \quad -1\,)\,,(\, 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,)\ ,$$
$$(b) \quad (\, 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3\,)\,,(\, 1 \quad -1 \quad -1 \quad 2\,)\,,(\, 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5\,)\,,(\, 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3\,)\ ,$$

i $\mathbf{R}^4$ är linjärt beroende eller oberoende.

8. Bevisa att snittet av två underrum till ett vektorrum E också är ett underrum av E. Kan detsamma sägas om unionen? Om inte, ge ett motexempel.

9. Visa att (a) mängden av alla symmetriska matriser av typen n/n, (b) mängden av alla nedåt triangulära matriser av typen n/n, är ett underrum av mängden av alla n/n-matriser. Vad är snittet av dessa två underrum?

10. Beskriv kolonnrummet och nollrummet till matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

11. Bestäm echelonformen för matrisen A, då

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}0&1&4&0\\0&2&8&0\end{pmatrix}, \qquad (b)\quad A=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\4&8\\0&0\end{pmatrix}.$$

Bestäm basvariabler och fria variabler i systemet $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Vilket är A:s nollrum? Vilket villkor bör vara uppfyllt för att systemet $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ skall vara konsistent? Bestäm den allmänna lösningen till detta system då det är konsistent. Vilken rang har A?

12. Är följande delmängder underrum av vektorrummet P av alla polynom:

$$\begin{aligned}
&(a)\quad U=\{p\in P \mid p(x)=ax^5,\ a\in\mathbf{R}\}\,;\\
&(b)\quad V=\{p\in P \mid p(x)=2a+x+2x^2,\ a\in\mathbf{R}\}\,;\\
&(c)\quad W=\{p\in P \mid p(-2)=p(1)=0\}\,;\\
&(d)\quad Z=\{p\in P \mid p(2)=p(3)=1\}\,?
\end{aligned}$$

13. Visa att mängden M är ett underrum till vektorrummet av alla 2/2-matriser, då

(a) M är mängden av alla matriser X som kommuterar med $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$;

(b) M är mängden av alla 2/2-matriser av formen $\begin{pmatrix}a&a+b\\0&2b\end{pmatrix}$, $(a,\,b\in\mathbf{R})$;

(c) M är mängden av alla 2/2-matriser av formen $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$, $(a,\,b\in\mathbf{R})$.

(Räkneoperationerna är matrisaddition och multiplikation av en matris med ett reellt tal.)

14. (a) Antag att $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum och antag att $\mathbf{a}_{n+1}$ ligger utanför $\operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$. Visa att vektorerna $\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_{n+1}$ är linjärt oberoende.

(b) Antag att å ena sidan $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\}$ och å andra sidan $\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n\}$ är mängder av linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum samt antag att snittet av spannen $\operatorname{spn}\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\}$ och $\operatorname{spn}\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n\}$ är $\{\mathbf{0}\}$. Visa att $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende.

15. Antag att $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum. Är vektorerna

$$\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\quad \mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4,\quad \mathbf{a}_3+2\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1\quad \mathbf{a}_4+2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$$

linjärt beroende? Ange, om de är linjärt beroende, en icke-trivial linjärkombination av dem som är likamed nollvektorn.

16. Bestäm en bas i radrummet, kolonnrummet och nollrummet till matrisen

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}1&-4&9&-7\\-1&2&-4&1\\5&-6&10&7\end{pmatrix}, \qquad (b)\quad A=\begin{pmatrix}-2&-5&8&0&-17\\1&3&-5&1&5\\3&11&-19&7&1\\1&7&-13&5&-3\end{pmatrix}.$$

17. Bestäm dimensionerna för kolonnrummet $R(A)$ och nollrummet $N(A)$ samt ange baser i dessa för alla värden på a, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Välj ut en maximal mängd av linjärt oberoende vektorer ur följande vektormängder:

$$\begin{array}{ll} (a) & \{(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0),\ (0\ \ 1\ \ 0\ \ 1),\ (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1),\ (-1\ \ 0\ \ 2\ \ 1)\}; \\ (b) & \{(0\ \ 1\ \ 2\ \ 3),\ (3\ \ 0\ \ 1\ \ 2),\ (2\ \ 3\ \ 0\ \ 1),\ (1\ \ 2\ \ 3\ \ 0)\}; \\ (c) & \{(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1),(-1\ \ 1\ \ -1\ \ -1),(1\ \ -1\ \ 1\ \ -2),(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\}. \end{array}$$

19. Ligger $\mathbf{b} = (3\ \ 4\ \ 5)$ i det underrum av $\mathbf{R}^3$ som spänns upp av

$$\mathbf{w}_1 = (1\ \ 1\ \ 0), \quad \mathbf{w}_2 = (2\ \ 2\ \ 1) \quad \text{och} \quad \mathbf{w}_3 = (0\ \ 0\ \ 2)?$$

20. Bevisa att varje delmängd av en mängd av linjärt oberoende vektorer är linjärt oberoende. Gäller det även att en delmängd av en mängd av linjärt beroende vektorer är linjärt beroende?

21. Undersök om följande vektormängder är linjärt beroende eller oberoende

$$\begin{array}{ll} (a) & \{(1\ \ 2\ \ 2),\ (2\ \ 1\ \ -2),\ (2\ \ -2\ \ 1)\}, \\ (b) & \{(1\ \ 1\ \ 1),\ (3\ \ 1\ \ 2),\ (0\ \ 2\ \ 1)\}, \\ (c) & \{(1\ \ 1\ \ 1),\ (3\ \ 1\ \ 2)\}, \\ (d) & \{(1\ \ 0\ \ 2),\ (-2\ \ 0\ \ -4)\}, \\ (e) & \{(1\ \ 0\ \ 0),\ (0\ \ 1\ \ 0),\ (0\ \ 0\ \ 1),\ (2\ \ 7\ \ -8)\}. \end{array}$$

Vilka av dessa mängder är en bas i $\mathbf{R}^3$?

22. Visa att $(a\ \ 3)$ och $(2\ \ 1-a)$ är linjärt oberoende vektorer för varje värde på a.

23. Antag att $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum E. Undersök om vektorerna $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0$ är linjärt beroende eller oberoende.

24. Ange en bas och bestäm dimensionen för underrummet av 2/2-matriser definierat i uppgift 13 (a) (använd lösningen av uppgift 5 i kapitel 2), 13 (b) och 13 (c). Vilka är i fallet 13 (b) koordinaterna för

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

i den konstruerade basen?

25. Låt A beteckna en m/n-matris och antag att vi vet att både raderna och kolonnerna i A är linjärt oberoende. Kan vi då säga någonting om typen m/n?

26. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. Ange motexempel i de fall då utsagan är falsk.

    (a) Om $S = \operatorname{spn}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ så är $\dim S = m$.

    (b) Snittet av två underrum kan inte vara den tomma mängden.

    (c) Om $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ så är $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (A är en matris och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är kolonnvektorer).

    (d) Radrummet för matrisen A har en entydig bas som kan räknas ut genom att man reducerar A till echelonform.

    (e) Om en kvadratisk matris A har linjärt oberoende kolonner så har även A^2 det.

27. Enligt uppgift 9 (a) är mängden av alla symmetriska 3/3-matriser ett underrum av mängden av alla 3/3-matriser. Bestäm en bas i detta underrum. Vad är underrummets dimension?

28. Visa att om V och W är tredimensionella underrum av $\mathbf{R}^5$ så har V och W en vektor gemensam som är olik nollvektorn.

29. Visa att om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt oberoende så är också $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ linjärt oberoende då vektorerna $\mathbf{w}_i$ är definierade genom $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

30. Bevisa att om matriserna A och B är sådana att $AB = 0$, så är kolonnrummet $R(B)$ en delmängd av nollrummet $N(A)$.

31. (a) Visa att polynomen $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$ och $p_3(x) = 1 + x + x^2$ bildar en bas i vektorrummet P_2 av alla polynom av högst graden 2. Räkna ut koordinaterna för $p(x) = x^2$ i denna bas.

    (b) Betrakta baserna $B = \{1, x, x^2\}$ och $C = \{p_1, p_2, p_3\}$ i P_2 (se (a)). Antag att polynomet p har koordinaterna 1, 0 och 2 i basen B. Vilka är koordinaterna för p i basen C? Antag att polynomet q har koordinaterna 1, 2 och 5 i basen C. Vilka är koordinaterna för q i basen B?

    (c) Visa att $M = \{1 - x, 1 + x + x^2, 1 - x^2\}$ är en bas i P_2. Vilket polynom har koordinaterna 1, 1 och 1 i basen M.

32. En $2n/2n$-matris M kan delas horisontellt och vertikalt i lika delar så att fyra block A, B, C och D uppstår (varje block är en n/n-matris):

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Om A^{-1} existerar kan man sätta in en nollmatris på C:s plats med en “BO1-operation med matrisblock”:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Vilken matris E skall man multiplicera M med från vänster för att åstadkomma denna operation? Vilken är E:s invers?

33. Använd sådana basoperationer med matrisblock, som beskrivs i uppgift 32, till att invertera matrisen
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$
där A och D är inverterbara block.

34. Räkna ut koordinaterna för vektorn $\mathbf{x} = (\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\,)$ i följande bas i $\mathbf{R}^4$:
$$\{(\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,),\, (\,1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\,),\, (\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\,),\, (\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,)\}\,.$$

35. Bestäm en bas i $\mathbf{R}^2$ sådan att vektorn $(\,3 \quad 7\,)^T$ i denna bas har koordinaterna 2 och 3. Finns det flera baser i $\mathbf{R}^2$, i vilka $(\,3 \quad 7\,)^T$ har de nämnda koordinaterna?

36. *Summan* av två underrum V och W av ett vektorrum E definieras genom
$$V + W = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{där } \mathbf{v} \in V,\, \mathbf{w} \in W\}\,.$$
Om V är kolonnrummet för en matris A (av typen m/n) och W är kolonnrummet för en matris B (av typen m/p) så är $V + W$ kolonnrummet för den matris $Q = (\,A \quad B\,)$, som man får genom att kombinera A och B till en enda matris. Det gäller då att $\dim(V + W) = r(Q)$. Varför? Bestäm en bas i $V + W$ i det fall att V spänns upp av $\mathbf{v}_1 = (\,1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\,)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,)^T$ samt W spänns upp av $\mathbf{w}_1 = (\,0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\,)^T$ och $\mathbf{w}_2 = (\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 1\,)^T$. Bestäm också en bas i $V \cap W$ och verifiera i detta speciella fall den allmänna formeln
$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W\,. \tag{5}$$

37. Visa att om $R(A) = N(A)$ för en matris A så är denna en kvadratisk matris av en typ n/n, där n är ett jämnt tal.

38. Antag att A är en kvadratisk, inverterbar matris. Bevisa att AB och B har samma nollrum, samma radrum och samma rang.

39. Låt V och W vara underrum av $\mathbf{R}^4$ definierade genom
$$\begin{aligned} V &= \{(\,a \quad b \quad c \quad d\,) \mid b + c + d = 0\}\,, \\ W &= \{(\,a \quad b \quad c \quad d\,) \mid a + b = 0,\ c = 2d\}\,. \end{aligned}$$
Ange en bas för de fyra underrummen V, W, $V \cap W$ och $V + W$ samt verifiera att formel (5) gäller ($V + W$ definieras i uppgift 36).

40. Visa att vektorerna $\mathbf{v} = (\,1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,)$ och $\mathbf{w} = (\,0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\,)$ tillhör underrummet U av $\mathbf{R}^4$ definierat genom $U = \{(\,x \quad y \quad z \quad u\,) \mid x{+}y = z{+}u\}$. Är mängden $\{\mathbf{v},\, \mathbf{w}\}$ en bas i U? Om inte, komplettera den med ett nödvändigt antal vektorer till en bas i U.

41. Visa att matriserna
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

har samma radrum och ange en bas i detta.

42. Har följande matris någon högerinvers (motivera!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} ?$$

43. Konstruera alla möjliga vänster- och högerinverser till matrisen $A = (1 \quad 1 \quad 0)$.

44. Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

har rangen 1 och skriv dem i formen $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ och $B = \mathbf{w}\mathbf{z}^T$. Verifiera att deras produkt AB är en multipel av matrisen $\mathbf{u}\mathbf{z}^T$ och att denna multipel är $\mathbf{v}^T\mathbf{w}$.