3. Gausseliminering genom matrismultiplikation

Vi skall visa att den omformning, som man får genom att utföra en basoperation på ett räkneschema, också kan fås genom att man multiplicerar räkneschemat från vänster med en viss matris E. Detta är ekvivalent med att man transformerar motsvarande ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom att multiplicera den från vänster med E, vilket ger $EA\mathbf{x} = E\mathbf{b}$.

Låt oss först se hur detta fungerar för $(BO1)$:

Exempel 3.1. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 1\,, \end{aligned}$$

som vi skriver som ett räkneschema $(A|\mathbf{b})$ genom att sätta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det första elimineringssteget, $(2) \to (2) - 2\,(1)$, är

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \end{array}\right) = (U_1|\mathbf{b}_1)\,.$$

Sätt

$$E_1 = I - 2J_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där J_{21} är en 3/3-matris som har nollor på alla andra platser än $(2,1)$, där den har en etta. Då svarar multiplikation med E_1 mot det första elimineringssteget, ty

$$E_1(A|\mathbf{b}) = (E_1A|E_1\mathbf{b})\,,$$

där enligt distributionslagen

$$E_1A = (I - 2J_{21})A = A - 2J_{21}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_1$$

och på samma sätt

$$E_1\mathbf{b} = \mathbf{b} - 2J_{21}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1\,.$$

Det andra elimineringssteget $(3) \to (3) - 1\,(1)$ svarar enligt samma mönster mot multiplikation från vänster med $E_2 = I - 1J_{31}$,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ som ger } (U_2|\mathbf{b}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \end{array}\right).$$

Det tredje, $(3) \to (3) - 2\,(2)$, svarar i sin tur mot multiplikation med $E_3 = I - 2J_{32}$,

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ och ger } (U_3|\mathbf{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nu överförts på echelonform genom multiplikation från vänster med $E = E_3 E_2 E_1$.

Allmänt gäller för ett system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är en m/n-matris, att $(BO1)$-operationen

$$\{(i) \to (i) - \lambda(k)\} \quad \text{motsvarar} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{multiplikation fr.v. med} \\ E = I - \lambda J_{ik} \end{array} \right\},$$

där J_{ik} är en m/m-matris som består av bara nollor utom på platsen (i,k) där den har en etta.

För $(BO2)$ har vi sambandet: Operationen

$$(i) \leftrightarrow (k)$$

motsvarar multiplikation från vänster med

$$E = \left(\begin{array}{ccccccccc} \ddots & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & \cdot & 1 & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \ddots & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & 1 & \cdot & & \\ & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}, \tag{1}$$

där (enligt konventionen) ett tomrum står för en nolla. Matrisen E är i detta fall en s.k. *enkel permutationsmatris*, som fås ur en enhetsmatris I så att man i denna låter raderna (i) och (k) byta plats.

För $(BO3)$ gäller: Operationen

$$(i) \to \lambda\,(i)$$

svarar mot multiplikation från vänster med diagonalmatrisen

$$E = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

Exempel 3.2. För tvåradiga system har vi t.ex.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & | & e \\ c & d & | & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d & | & f \\ a & b & | & e \end{pmatrix}, \qquad (BO2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & | & e \\ c & d & | & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & | & e \\ 7c & 7d & | & 7f \end{pmatrix}, \qquad (BO3).$$

Det faktum, att $(BO1)$–$(BO3)$ svarar mot multiplikation (fr.v.) med vissa matriser, kommer att tillåta oss att dra långtgående slutsatser. För att kunna dra dessa slutsatser, måste vi emellertid utveckla mera grundteori.

Matrisinverser

För en basoperation gäller alltid (se Sats 1.1) att en lämplig annan basoperation kan upphäva den effekt som den första basoperationen hade. Om någon basoperation således transformerar systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ till $EA\mathbf{x} = E\mathbf{b}$, så kan dess verkan upphävas genom multiplikation från vänster med en ny matris E', som svarar mot den "inversa" basoperationen:

$$E'EA\mathbf{x} = E'E\mathbf{b}.$$

Detta system bör nu vara identiskt med det ursprungliga, så att $E'E = I$, vilket leder till följande definition:

Definition 3.1. Två n/n-matriser A och B är varandras *inverser* om

$$AB = I \quad \text{och} \quad BA = I.$$

En kvadratisk matris som har en invers sägs vara *inverterbar*.

Exempel 3.3. Vi konstaterar först att det finns matriser, som är olika nollmatrisen men som saknar invers. Betrakta t.ex. matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För varje $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är nämligen

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \neq I,$$

dvs. ingen matris B är invers till A.

Sats 3.1. *En kvadratisk matris A har högst en invers.*

Bevis. Om B och B' är inverser till A så är

$$BA = I \quad \text{och} \quad AB' = I.$$

Alltså är $B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'$. $\diamondsuit$

För inversen till en matris A skall vi från och med nu använda beteckningen A^{-1}. Observera att om $B = A^{-1}$ så är enligt definitionen $A = B^{-1}$, vilket genom insättning ger att $(A^{-1})^{-1} = A$. Detta är den första av räknereglerna i följande sats:

Sats 3.2. *Om A är en inverterbar n/n-matris så är A^{-1} inverterbar och λA är inverterbar om dessutom $\lambda \neq 0$. Under de nämnda antagandena är*

$$(i) \quad (A^{-1})^{-1} = A\,,$$
$$(ii) \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad (\lambda \neq 0)\,.$$

Om både A och B är inverterbara n/n-matriser, så är AB inverterbar och

$$(iii) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Bevis. Vi bevisade redan (i). För att bevisa (ii) räcker det, på grund av Sats 3.1, att visa att $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ är en invers till λA: Eftersom skalära faktorer kan placeras var som helst i en matrisprodukt är

$$\begin{aligned}(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) &= \left(\lambda\frac{1}{\lambda}\right)AA^{-1} = I \\ \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) &= \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)A^{-1}A = I\,.\end{aligned}$$

För verifieringen av (iii) räcker det att visa att $B^{-1}A^{-1}$ är en invers till AB:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I\,,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I\,. \diamondsuit\end{aligned}$$

Vi har sett att $(BO1)$ svarar mot multiplikation fr.v. med en matris av formen $E = I - \lambda J_{ik}$ $(i \neq k)$. Eftersom J_{ik} består av nollor utom på platsen (i,k), där den har en etta, inses lätt att

$$J_{ik}J_{lm} = \begin{cases} J_{im}, & \text{om } k = l, \\ 0, & \text{om } k \neq l. \end{cases} \tag{2}$$

På grund av detta är $E^{-1} = I + \lambda J_{ik}$, ty vi har t.ex. att

$$\begin{aligned}EE^{-1} &= (I - \lambda J_{ik})(I + \lambda J_{ik}) \\ &= I + \lambda J_{ik} - \lambda J_{ik} - \lambda^2 J_{ik}J_{ik} = I\,.\end{aligned}$$

På samma sätt ser man att $E^{-1}E = I$.

Exempel 3.4. Om $E = I - 5J_{12}$ är en 3/3-matris, är

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta betyder att om man utför $(BO1)$-operationerna $(1) \to (1) - 5\,(2)$ och $(1) \to (1) + 5\,(2)$ efter varandra, så förblir räkneschemat (eller ekvationssystemet) oförändrat.

Exempel 3.5. Den enkla permutationsmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är sin egen invers, ty

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta svarar mot att om man utför $(BO2)$-operationen $(1) \leftrightarrow (2)$ två gånger på ett räkneschema, så återfår man det ursprungliga räkneschemat.

Exempel 3.6. Matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{har inversen} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket är liktydigt med att $(BO3)$-operationerna $(2) \to 3\,(2)$ och $(2) \to \frac{1}{3}(2)$ upphäver varandra.

Uträkning av inverser

Att bestämma inversen $X = A^{-1}$ till en n/n-matris A innebär att man löser matrisekvationen $AX = I$. Vi kommer nämligen senare att se, att om en matris X satisfierar denna ekvation så satisfierar samma X **automatiskt** också ekvationen $XA = I$. På bl.a. detta grundar sig följande metod att räkna ut inversen till en matris A:

Vi inför beteckningar för kolonnerna i X och I genom att sätta $X = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n)$ och $I = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)$. Matrisekvationen $AX = I$ kan då skrivas som n ekvationssystem med samma koefficientmatris A:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \ldots \quad , A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n\,.$$

Dessa kan lösas var och en för sig med hjälp av räknescheman $(A|\mathbf{e}_1), \ldots, (A|\mathbf{e}_n)$. Men då det ju är koefficientmatrisen A, som bestämmer vilka basoperationer man använder, kommer man att upprepa (nästan) samma kalkyl n gånger. För att undvika dessa upprepningar använder man sig av **ett enda** sammanslaget räkneschema

$$(A|\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) = (A|I)\,,$$

där alla högerled beaktas samtidigt genom att man skriver dem efter varandra. Om en lösning X existerar, kan detta schema fås i reducerad echelonform med hjälp av basoperationer enligt mönstret

$$(A|I) \to \cdots \to (I|\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n) = (I|X)\,.$$

Lösningen $\mathbf{x}_i$ till det i:te ekvationssystemet finner man då på den plats där högerledet $\mathbf{b}_i$ ursprungligen fanns. Detta innebär att då det i räkneschemat står en enhetsmatris I på vänstra sidan om det vertikala strecket, står inversen $X = A^{-1}$ på den högra sidan om strecket.

Exempel 3.7. Vi inverterar matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av följande kalkyler

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{BO2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 & 1 \\ -2 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{BO1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 & 1 \\ 0 & -3 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{BO3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \overset{BO1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & | & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Inversen är alltså

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exempel 3.8. Matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ har ingen invers, ty den andra raden blir inkonsistent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

LU-faktorisering

I exempel 3.1 har vi genom tillämpning av $(BO1^+)$ fått ett system på echelonform. Detta svarade mot att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ multiplicerades från vänster med $E = E_3E_2E_1$ så att en ny ekvation $U_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$ uppstod, där U_3 är en echelonmatris. Nu är ju $EA = U_3$, vilket ger, då vi multiplicerar från vänster med $L = E^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$:

$$A = LU_3\,.$$

Hur ser L ut? Inverserna av E_1, E_2 och E_3 fås på samma sätt som i exempel 3.4:

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observera att elementen på platserna $(2,1)$, $(3,1)$ och $(3,2)$ i L är just precis de multipler $\lambda = 2$, 1 och 2 som vi använde i de tre elimineringsstegen då vi **subtraherade** en multipel av en ekvation från en annan. Detta är ingen slump utan vi kan formulera en generell regel. För att förtydliga detta skall vi se närmare på hur produkten L i vårt exempel uppstod: På grund av den speciella ordning, i vilken vi eliminerat (först i kolonn 1, sedan i kolonn 2 osv.), blir enligt formel (2) produkter av minst två faktorer J_{ik} en nollmatris, så att

$$L = (I + 2J_{21})(I + 1J_{31})(I + 2J_{32}) = I + 2J_{21} + 1J_{31} + 2J_{32}\,.$$

Detta betyder att matrisen L kan skrivas ut utan att man utför någon multiplikation. Talet λ hamnar alltid på platsen (i,k) i L då man utför operationen $(i) \to (i) - \lambda(k)$:

Sats 3.3. *Om en m/n-matris A kan överföras på echelonform U enbart med hjälp av $(BO1^+)$, så kan A LU*-faktoriseras *i en produkt*

$$A = LU\,.$$

Om elimineringen skett i normal ordning så att man eliminerat i A:s kolonner från vänster till höger, kan matrisen L skrivas ut enligt regeln:

L är en nedåt triangulär m/m-matris, sådan att

- *L har ettor i diagonalen;*
- *multipeln λ sätts på plats (i,k) under diagonalen i L om man eliminerat med operationen $(i) \to (i) - \lambda(k)$;*
- *övriga matriselement är nollor.*

Om A är en n/n-matris och antalet pivotelement i U är precis n, så är U en uppåt triangulär matris, vilkens diagonalelement (= pivotelement) *alla är olika noll.*

Vid LU-faktorisering av en matris A speler högerledet ingen roll. Vi skriver därför inte ut något högerled i räkneschemat.

Exempel 3.9. Om man skall LU-faktorisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

gör man följande kalkyler med hjälp av $(BO1^+)$:

$$A \underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,,$$

där de multipler λ som använts i operationerna antecknats under pilarna. T.ex. operationen $(3) \to (3) - 3\,(2)$ ger upphov till talet 3 på plats $(3,2)$ i L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om man numrerar pivotkolonnerna i A (= de kolonner som innehåller pivotelement) från vänster till höger, kan man också uttrycka regeln i Sats 3.3 på följande sätt: **Då man eliminerar i *pivotkolonn* nummer k i A, skall de använda multiplerna λ skrivas i *kolonn* nummer k i L.**

Permutationsmatriser

Ibland kan en matris inte fås i echelonform enbart med hjälp av $(BO1^+)$. Den kan då inte LU-faktoriseras **direkt**. Detta gäller exempelvis för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ett ekvationssystem som svarar mot A är t.ex.

$$\begin{aligned} 2x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= b_2 . \end{aligned}$$

Om man permuterar ekvationerna, dvs. använder $(BO2)$, blir systemet däremot genast uppåt triangulärt. Koefficientmatrisen för det nya systemet blir

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och fås ur A genom multiplikation från vänster med en permutationsmatris P av det slag som beskrivs i ekvation (1).

Definition 3.2. En matris, som fås ur en enhetsmatris I genom att man låter raderna i I byta ordning, kallas en *permutationsmatris*. En permutationsmatris är *enkel* och betecknas med P_{ik} om den fås ur I genom att man låter raderna (i) och (k) i I byta plats $(i \neq k)$.

Notera att $P_{ik} = P_{ki}$ och att P_{ik} är inverterbar och är sin egen invers: $P_{ik}^{-1} = P_{ik}$.

Vi har sett att multiplikation av en matris A från vänster med den enkla permutationsmatrisen P_{ik} åstadkommer att raderna (i) och (k) i A byter plats. Något liknande gäller för alla permutationsmatriser:

Exempel 3.10. Betrakta t.ex. permutationsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_4 \end{pmatrix} ,$$

där $\bar{\mathbf{e}}_i$ betecknar rad i i enhetsmatrisen I_4. Ordningsföljden på raderna i P kan fås ur den ursprungliga (den som de har i I_4) med hjälp av en följd av enkla permutationer:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \xrightarrow{P_{12}} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \xrightarrow{P_{23}} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} .$$

Således är $P = P_{23}P_{12}$. Om vi nu bildar en produkt PA så kommer P_{12} att byta om raderna (1) och (2) i A, varefter P_{23} byter om raderna (2) och (3) i $P_{12}A$. Resultatet blir att P flyttar om raderna i A så att de får ordningsföljden (2), (3), (1), (4).

Eftersom enkla permutationsmatriser är sina egna inverser, gäller dessutom att P är inverterbar och att $P^{-1} = P_{12}P_{23}$.

Detta gäller generellt:

Sats 3.4. *Låt P vara den permutationsmatris som fås ur I_m genom att man ordnar om raderna i ordningsföljden σ samt låt A vara en m/n-matris. Då är*

(*i*) *P en produkt $P = P_{i_1j_1} \cdots P_{i_pj_p}$ av enkla permutationsmatriser;*

(*ii*) *P inverterbar och $P^{-1} = P_{i_pj_p} \cdots P_{i_1j_1}$;*

(*iii*) *PA är likamed den matris som man får ur A genom att skriva A:s rader i ordningsföljden σ.*

Mera om LU-faktorisering

Vi har sett att en matris kan LU-faktoriseras om den kan överföras i echelonform enbart med hjälp av $(BO1^+)$. Detta är inte alltid möjligt utan man kan bli tvungen att permutera rader med hjälp av $(BO2)$ för att komma till en echelonform. För att inkludera också sådana fall krävs en ny formulering av satsen om LU-faktorisering.

Antag att A är en m/n-matris, som (eventuellt) inte kan fås på echelonform enbart med hjälp av $(BO1^+)$ så att också $(BO2)$ måste tas till hjälp. Då kan man tänka sig att **genast i början** göra de radbyten som kommer att behövas (dvs. bilda en matris PA där P är en permutationsmatris) för att i fortsättningen uteslutande använda $(BO1^+)$, varvid man LU-faktoriserar PA. Detta är möjligt för alla m/n-matriser A, ty $(BO3)$ behövs strängt taget inte vid omformning till echelonform. Däremot behövs $(BO3)$ nog om man vill få fram en reducerad echelonform.

Vi kan alltså formulera följande sats:

Sats 3.5. *För varje m/n-matris A finns en permutationsmatris P, sådan att PA kan LU-faktoriseras*

$$PA = LU\,.$$

I praktiken behöver man inte göra alla radbyten först, utan man kan under räkningens gång modifiera sina listor med multipler λ efter varje radbyte, så att listorna gäller **som om radbytet hade gjorts redan i början**:

Exempel 3.11. I följande sekvens av räknescheman skriver vi först ut en preliminär lista med multipler (nedan med index 0), som byts ut mot en ny lista (med index 1) så snart operation $(BO2)$ används. En multipel hör ju ihop med en viss rad, varför multiplerna bör byta plats på samma sätt som motsvarande rader:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_0}{\xrightarrow{BO1^+}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_1}{\xrightarrow{BO2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3) \\ (2) \end{matrix} = U\,.$$

Samtidigt har vi noterat att den ursprungliga ordningen (1), (2), (3) på raderna i A har omvandlats till (1), (3), (2) i U, vilket ger oss permutationsmatrisen P. Vi har alltså att $PA = LU$, där

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Definition 3.3. En n/n-matris A sägs vara *icke-singulär* om den med hjälp av (vilka som helst) basoperationer kan fås i en uppåt triangulär form U, som innehåller n pivotelement. Om antalet pivotelement är mindre än n sägs matrisen A vara *singulär*.

Exempel 3.12. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

är icke-singulär, ty echelonformen nedan innehåller tre pivotelement:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Däremot är matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

singulär, ty

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nedanstående ekvivalenser för en n/n-matris A med den motsvarande echelonformen U,

$$\begin{aligned} A \text{ är singulär } &\iff \#(\text{ pivotelement}) < n \\ &\iff \text{ekvationen } U\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har icke-triviala lösningar} \\ &\iff \text{ekvationen } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har icke-triviala lösningar} \ , \end{aligned}$$

ger en enkel karakterisering av en icke-singulär matris, vilken vi i fortsättningen kommer att behöva i många sammanhang:

$$(3) \qquad A \text{ är icke-singulär} \iff \left\{ \begin{array}{c} A \text{ är kvadratisk och} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ bara om } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array} \right\} .$$

Vi kan nu göra ett tillägg till Sats 3.5:

Sats 3.6. *Antag att A är kvadratisk och att $PA = LU$ är LU-faktoriseringen av PA, där P är en permutationsmatris. Om A är* icke-singulär*, så gäller:*

(*i*) *Diagonalelementen i U är olika noll;*

(*ii*) *ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har* exakt en *lösning (för varje $\mathbf{b}$).*

Om A är singulär *så är något av diagonalelementen i U en nolla.*

Bevis. Det sista påståendet och (i) följer direkt ur definition 3.3. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är ekvivalent med en ekvation av formen $U\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$. Eftersom varje kolonn i U innehåller ett pivotelement om A är icke-singulär, så är ingen variabel fri och systemet är konsistent. Bakåtsubstitution ger därför exakt en lösning. Alltså gäller (ii). $\diamondsuit$

LU-faktoriseringen av en kvadratisk matris A är osymmetrisk såtillvida att L har ettor i diagonalen medan U inte behöver ha det som t.ex. i LU-faktoriseringen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = LU\,.$$

Detta skönhetsfel är lätt att korrigera. Vi skriver U som en produkt av en diagonalmatris D och en ny uppåt triangulär matris U' med ettor i diagonalen,

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = DU'\,,$$

och får $A = LDU'$. En sådan LDU-faktorisering av A (eller PA) är alltid möjlig om diagonalelementen i U är olika noll, dvs. om A är icke-singulär.

Sats 3.7. *Om A är en icke-singulär kvadratisk matris så finns det en permutationsmatris P och en så kallad LDU-*faktorisering *$PA = LDU$ av PA, där*

- *L är en nedåt triangulär matris med ettor i diagonalen,*
- *D är en diagonalmatris, vilkens diagonalelement är olika noll,*
- *U är en uppåt triangulär matris med ettor i diagonalen.*

Användningar av LU- och LDU-faktoriseringar

Om man samtidigt löser flera ekvationssystem,

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots \quad , A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p\,,$$

med samma koefficientmatris, kan man göra som vi gjorde vid invertering av en matris: I stället för att göra skilda kalkyler i flera räknescheman $(A|\mathbf{b}_1), \ldots, (A|\mathbf{b}_p)$, vilket leder till upprepningar av räkneoperationer, slår vi ihop dessa till ett enda räkneschema

$$(A|B) = (A|\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p)\,,$$

genom att skriva högerleden efter varandra i $B = (\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p)$. Lösningarna till alla dessa system kan sedan lätt skrivas ut då schemat $(A|B)$ överförts i reducerad echelonform. **Observera att detta är ekvivalent med att lösa matrisekvationen $AX = B$, där $X = (\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_p)$** (se uppgift 3 i kapitel 2).

Ovanbeskrivna metod, som är bra vid räkning för hand, har olägenheten att alla högerled måste vara kända innan man kan påbörja kalkylerna.

En annan metod använder sig av LU-faktoriseringen $A = LU$ av A (eller av $PA = LU$ av PA, varvid högerleden är $P\mathbf{b}_1, \ldots, P\mathbf{b}_p$). Ekvationen $A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ kan skrivas $LU\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, och denna i sin tur som två ekvationer

$$\begin{aligned} L\mathbf{y}_i &= \mathbf{b}_i \\ U\mathbf{x}_i &= \mathbf{y}_i\,, \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{4}$$

där man har infört en temporär variabel $\mathbf{y}_i$. Först löser man $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ och får LU-faktoriseringen på köpet. Efter det använder man sig av (4), för $i = 2, \ldots, p$, så att man löser den första ekvationen med räkneschemat $(L|\mathbf{b}_i)$, vilket ger $\mathbf{y}_i$, varefter man löser den andra ekvationen med räkneschemat $(U|\mathbf{y}_i)$, vilket ger $\mathbf{x}_i$. Det är uppenbart att **alla högerled inte behöver vara kända från början** då man använder denna metod, utan nya högerled kan läggas till när som helst (se uppgifterna 3 och 10).

På grund av att både L och U är triangulära, krävs bara framåt- respektive bakåtsubstitutioner vid lösningen, dvs. ett relativt litet antal räkneoperationer. De båda beskrivna metoderna kräver ungefär lika stor arbetsinsats. Man kan visa att om A är en n/n-matris så krävs i bägge fallen

$$\approx \frac{2}{3}n^3 + 2pn^2$$

räkneoperationer med de fyra räknesätten.

Exempel 3.13. Om vi skall lösa systemen $A\mathbf{u} = \mathbf{b}_1$ och $A\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ställer vi enligt den först beskrivna metoden upp ett gemensamt räkneschema, som överförs i reducerad echelonform:

$$(A|\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Både u_3 och v_3 är fria, så vi kan sätta $u_3 = s$ och $v_3 = t$. Med hjälp av den första kolonnen i högerledet får vi lösningarna till det första systemet och med hjälp av den andra kolonnen i högerledet lösningarna till det andra systemet:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 + 5s \\ u_2 &= 1 - 2s \\ u_3 &= s \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} v_1 &= -7 + 5t \\ v_2 &= 3 - 2t\,. \\ v_3 &= t \end{aligned}$$

Enligt den andra metoden ställer vi upp räkneschemat för den första ekvationen och kan, då vi har nått echelonform (med hjälp av $(BO1^+)$ och eventuellt $(BO2)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix},$$

skriva ut LU-faktoriseringen

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sedan fortsätter vi tills räkneschemat är i reducerad echelonform och kan då skriva ut lösningarna till det första systemet. För att lösa det andra systemet betraktar vi först $L\mathbf{y} = \mathbf{b}_2$,

$$(L|\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}, \text{ och får att } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Därefter löser vi $U\mathbf{v} = \mathbf{y}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & -7 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix},$$

och finner den tidigare nämnda lösningen.

Kom ihåg att vårt exempel med små matriser bara visar principen för hur metoderna fungerar. Fördelarna hos dessa två metoder blir betydande först då systemen är stora och/eller antalet system stort.

Vi skall nu se vilka **teoretiska** följder Sats 3.7 om LDU-faktorisering har. Vi visar först att om A är en icke-singulär n/n-matris med LDU-faktoriseringen $A = LDU$, så är varje faktor L, D och U inverterbar:

Faktorn L är en produkt $L = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$ av inverterbara faktorer (som svarar mot $(BO1^+)$) och är därmed själv inverterbar enligt Sats 3.2 (iii). Faktorn

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{har inversen} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Varje diagonalelement d_i är nämligen olik noll enligt Sats 3.6. Den uppåt triangulära matrisen U slutligen, kan överföras på en reducerad echelonform som är I med hjälp av bakåtsubstitutioner $(BO1^-)$, dvs. genom att man multiplicerar med inverterbara matriser F_j av formen $I - \lambda J_{ik}$:

$$F_q \cdots F_1 U = I\,.$$

Om man multiplicera från vänster med i tur och ordning $F_q^{-1}, \ldots, F_1^{-1}$, får man att U är en produkt av inverterbara faktorer, $U = F_1^{-1} \cdots F_q^{-1}$. Alltså är också U inverterbar.

Med hjälp av detta kan vi visa att LDU-faktoriseringar är **entydiga**:

Sats 3.8. *Antag att A är en icke-singulär kvadratisk matris och att A* (eller PA, där P är en permutationsmatris) *har LDU-faktoriseringarna*

$$A = L_1 D_1 U_1 \qquad \text{och} \qquad A = L_2 D_2 U_2 \,.$$

Då är $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ och $U_1 = U_2$.

Bevis. Ur $L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$ följer, då man multiplicerar från vänster med L_1^{-1} och D_1^{-1} och från höger med U_2^{-1}, att

$$U_1 U_2^{-1} = D_1^{-1} L_1^{-1} L_2 D_2 \,.$$

Vänstra ledet är en produkt av två uppåt triangulära matriser med ettor i diagonalen och har därför själv samma form (se uppgift 19) medan högra ledet är en nedåt triangulär matris. Detta medför att bägge leden måste vara I:

$$U_1 U_2^{-1} = I \quad \text{och} \quad D_1^{-1} L_1^{-1} L_2 D_2 = I \,. \tag{5}$$

Multiplikation av den första likheten i (5) med U_2 från höger ger att $U_1 = U_2$. Genom att multiplicera den andra likheten från vänster med D_1 och från höger med D_2^{-1} fås

$$L_1^{-1} L_2 = D_1 D_2^{-1} \,,$$

där vänsterledet är nedåt triangulärt med ettor i diagonalen och högerledet en diagonalmatris. Bägge leden måste då vara en enhetsmatris: $L_1^{-1} L_2 = I$ och $D_1 D_2^{-1} = I$. Följaktligen är $L_1 = L_2$ och $D_1 = D_2$. $\diamondsuit$

Anmärkning. Observera att det i allmänhet finns flera olika permutationsmatriser P, sådana att PA kan LDU-faktoriseras för en given icke-singulär matris A. Dessa faktoriseringar är olika för olika P men då P är bestämt är faktorerna i LDU-faktoriseringen av PA entydiga.

En viktig konsekvens av inverterbarheten hos faktorerna L, D och U i en LDU-faktorisering är följande sats:

Sats 3.9. *En kvadratisk matris A är icke-singulär om och endast om den är inverterbar.*

Bevis. Antag att A är icke-singulär. Då finns det en permutationsmatris P och en tillhörande LDU-faktorisering $PA = LDU$. Eftersom permutationsmatriser är inverterbara (Sats 3.4), är

$$A = P^{-1} LDU \,,$$

där alla faktorer är inverterbara. Enligt Sats 3.2 (*iii*) är då också A inverterbar.

Antag omvänt att A är inverterbar. För att visa att A är icke-singulär, antar vi att $\mathbf{x}$ är en någon lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Genom multiplikation från vänster med A^{-1} fås att $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen. Således är A en icke-singulär matris enligt (3). $\diamondsuit$

Symmetriska matriser

Definition 3.4. En matris A är *symmetrisk* om $A^T = A$.

Om A är av typen m/n så är A^T av typen n/m. Således måste A vara kvadratisk för att kunna vara symmetrisk. Dessutom bör $a_{ik} = a_{ki}$ för varje i och k hos en symmetrisk matris.

Sats 3.10. *Om matrisen A är inverterbar, är också A^T inverterbar och*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

Bevis. Om A är inverterbar, är

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I ,$$
$$(A^{-1})^T(A^T) = (AA^{-1})^T = I^T = I ,$$

dvs. $(A^{-1})^T$ är inversen till A^T. $\diamondsuit$

Ur Sats 3.10 följer:

Sats 3.11. *Om A är inverterbar och symmetrisk så är också A^{-1} symmetrisk.*

Bevis. Detta gäller eftersom $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$. $\diamondsuit$

LDU-faktoriseringen av en symmetrisk, inverterbar matris är speciellt enkel:

Sats 3.12. *Om A är symmetrisk och inverterbar och kan LDU-faktoriseras, så har faktoriseringen utseendet $A = LDL^T$, dvs. $U = L^T$.*

Bevis. Genom transponering av $A = LDU$ fås att

$$A = A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T ,$$

vilket är en LDU-faktorisering av A. Entydigheten hos LDU-faktoriseringar (Sats 3.8) ger att $U^T = L$ och $L^T = U$. $\diamondsuit$

Avrundningsfel. Partiell pivotering

Då man löser linjära ekvationssystem, utförs ett stort antal räkneoperationer. För ett system med n ekvationer och n obekanta krävs ungefär $2n^3/3$ räkneoperationer för att få fram lösningen. Vid varje räkneoperation måste vi räkna med ett avrundningsfel (koefficienterna avrundas kanske till 3 signifikanta siffror) och detta påverkar naturligtvis lösningen, som då bara blir approximativ.

Ibland kan koefficientmatrisen ha en inneboende *känslighet*, som gör att en liten ändring av ett matriselement i räkneschemat, ett avrundningsfel, **oundvikligen** får stor inverkan på (den approximativa) lösningen. En annan felkälla kan vara att kalkylerna görs på ett sådant sätt att felen förstoras i onödan. Vi skall om en stund beskriva en enkel metod att undvika sådana fel, som inte beror på genuin känslighet.

Följande är ett exempel på en koefficientmatris som är genuint känslig:

Exempel 3.14. Av de två systemen

$$\begin{cases} u + \quad\quad\quad v = 2 \\ u + 1,0001v = 2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} u + \quad\quad\quad v = 2 \\ u + 1,0001v = 2,0001 \end{cases}$$

med samma koefficientmatris, har det första systemet lösningen $u = 2$, $v = 0$, medan det andra har lösningen $u = 1$, $v = 1$. Orsaken är helt enkelt att de två räta linjerna $u + v = \alpha$ och $u + 1,0001v = \beta$ är **nästan parallella**, varför en ändring i femte siffran i ett tal i högerledet förorsaker en ändring i första siffran i skärningspunkten (dvs. lösningen). Eliminering ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \alpha \\ 1 & 1,0001 & | & \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \alpha \\ 0 & 0,0001 & | & \beta - \alpha \end{pmatrix}.$$

"Parallelliteten" hos de två linjerna visar sig här i att det uppstår ett pivotelement, som är nära noll. I fortsättningen av kalkylerna kommer vi att dividera med detta tal nära noll, och därför förstoras eventuella avrundningsfel. Här hjälper det inte heller att permutera ekvationerna och därför är känsligheten genuin.

Om det är möjligt, bör man undvika att göra kalkylerna så att något pivotelement blir ett tal nära noll. Metoden med *partiell pivotering* anger en enkel regel för detta:

Varje gång man skall eliminera med hjälp av $(BO1^+)$ *för att få ett system i echelonform, bör man först permutera de återstående raderna så, att det till beloppet största elementet i resten av kolonnen blir pivotelement.*

I koefficientmatrisen (= vänstra delen av ett räkneschema)

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ 0 & a_{32} & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & a_{m2} & \cdots & * \end{pmatrix}$$

har vi redan ett pivotelement, d_{11} ($\neq 0$). I nästa steg bör vi alltså bland talen a_{22}, a_{32}, $\ldots$, a_{m2} välja det som är störst till beloppet och sedan låta den rad, som talet ingår i, bli rad nummer två så att det utvalda talet blir nästa pivotelement (ifall inte alla dessa tal är noll, varvid man naturligtvis går vidare till tredje kolonnen).

Övningsuppgifter

1. Vad händer med en 3/3-matris A om man multiplicerar den (a) från vänster, (b) från höger med matriserna

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. I ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta gausseliminerades genom att i tur och ordning basoperationerna

$$\begin{array}{rl} (i) & (2) \to (2) - 4\,(1) \\ (ii) & (3) \to (3) - 2\,(1) \\ (iii) & (3) \to (3) - \dfrac{1}{3}(2) \end{array}$$

användes, varvid det triangulära systemet

$$\begin{aligned} u - 2v + 3w &= 11 \\ 9v - 13w &= -40 \\ \frac{4}{3}w &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

uppstod. Hur såg systemet ut från början?

3. Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $A = LU$ och

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Antag att P_{ij} och P_{kl} är enkla permutationsmatriser av samma typ. När kommuterar de, dvs. när är $P_{ij}P_{kl} = P_{kl}P_{ij}$?

5. Hur många permutationsmatriser finns det (a) av typ $3/3$, (b) av typ n/n?

6. Finn faktorerna L, och U i LU-faktoriseringen av matrisen

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Vilka värden på a och b leder till radbyte vid triangulering av A och vilka värden gör A singulär, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Bestäm LDU-faktoriseringen av PA, där P är en lämplig permutationsmatris, då

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Bestäm en permutationsmatris P sådan att PA har en LDU-faktorisering och beräkna denna, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Antag att LU-faktoriseringen $A = LU$ är given men att systemet som skall lösas är $A^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Finn en ändamålsenlig metod att beräkna $\mathbf{y}$.

11. Bestäm inversen till matrisprodukten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Beräkna inverserna, ifall de existerar, till

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

13. Antag att A, B och C är inverterbara matriser. Vad är inversen till $AB^{-1}C$? Är A^2 inverterbar? Är $A+B$ inverterbar? Visa att $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

14. Bestäm inversen till

$$(a) \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Finn alla 2/2-matriser, som är sin egen invers.

16. Ange de värden på a för vilka nedanstående matris saknar invers:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & a-1 \end{pmatrix}.$$

17. Visa att det finns oändligt många *vänsterinverser* till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(dvs. matriser B sådana att $BA = I$) men ingen *högerinvers* till A (dvs. ingen matris C sådan att $AC = I$).

18. Bestäm den symmetriska LDU-faktoriseringen $A = LDL^T$ av

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{pmatrix}.$$

19. Visa att produkten av två uppåt triangulära n/n-matriser med ettor i diagonalen är en matris av samma typ.

20. En kvadratisk, inverterbar matris sägs vara *ortogonal* om $A^{-1} = A^T$. Visa, (a) att produkten av två ortogonala matriser är en ortogonal matris, (b) att om A är ortogonal så är också A^{-1} ortogonal.

21. Antag att A är en kvadratisk, icke-singulär matris. Visa att både A och A^T ger upphov till samma pivotelement, om enbart $(BO1^+)$ används.

22. Antag att A är en inverterbar matris och att matriserna A och B kommuterar, dvs. att $AB = BA$. Visa

    (a) att också A^{-1} och B kommuterar,

    (b) att om A och B dessutom är symmetriska, så är också $A^{-1}B$ symmetrisk.

23. Visa att varje idempotent matris A, som inte är I, måste vara singulär (A är idempotent om $A^2 = A$).

24. Räkna ut LU-faktoriseringen av matrisen

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

25. Bestäm matrisen A då vi vet att A är inverterbar och att inversen till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A \qquad \text{är} \qquad 7\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. Låt A vara en n/n-matris, som har talen $d_1, \dots, d_n$ i diagonalen men i övrigt består ettor. Antag att $d_i > 1$ för varje i. Visa att $x^T A x > 0$ för varje $n/1$-vektor $x \neq 0$ och slut härav att A är icke-singulär. (Ledning: Skriv A som summan av en diagonalmatris med talen $d_i - 1$ i diagonalen och en matris som består av enbart ettor.)

27. En *kubisk ri-funktion* $f(x)$ genom givna punkter $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ är definierad i varje intervall $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ som ett tredjegradspolynom $q_i(x)$. Dessa polynom är valda så att $f(x)$, $f'(x)$ och $f''(x)$ blir kontinuerliga i skarvningspunkterna $x_1, \dots, x_{n-1}$. Om man dessutom kräver att $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ så sägs den kubiska ri-funktionen vara *naturlig*. Om alla intervall har samma längd $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, så är för den naturliga kubiska ri-funktionen

$$q_i(x) = ty_i + (1-t)y_{i-1} + ht(1-t)\left[(k_{i-1} - d_i)(1-t) - (k_i - d_i)t\right],$$

där $x = x_{i-1} + th$, $d_i = (y_i - y_{i-1})/h$ och talen $k_0, \dots, k_n$ fås ur matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & .. & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & .. & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ - \\ k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 + d_2 \\ d_2 + d_3 \\ - \\ d_{n-1} + d_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm LU-faktoriseringen av koefficientmatrisen i det fall att den är en 4/4-matris. (b) Bestäm den naturliga kubiska ri-funktionen genom $(0,1)$, $(1,3)$ och $(2,2)$.