2. Matriser och vektorer

Definition 2.1. En *matris* är ett rektangulärt schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

av reella tal, som kallas *matriselement*. Matrisen A har m *rader* och n *kolonner* och sägs därför vara en m/n-*matris*, där m/n utgör matrisens *typ*.

Då man vill framhålla beteckningen för A:s matriselement, skriver man ofta $A = (a_{ik})$. Talet a_{ik} är alltså matriselementet i rad i och kolonn k eller som man säger matriselementet "på platsen (i,k)".

Definition 2.2. Två matriser $A = (a_{ik})$ och $B = (b_{ik})$ sägs vara *lika* ($A = B$), om de är av samma typ och $a_{ik} = b_{ik}$ för varje i och k.

Exempel 2.1. Ett räkneschema som t.ex. det här till vänster,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

är en 3/4-matris. Att vi har skrivit in streck som utmärker var likhetstecknen skall stå, hindrar inte att vi kallar schemat en matris. Till höger har vi en 3/2-matris.

Definition 2.3. För varje typ m/n kan vi skriva ut en *nollmatris*, dvs. en matris som består av enbart nollor. Dessa betecknas alla med 0. En *radvektor* respektive *kolonnvektor* är en matris av formen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{respektive} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

En m/n-matris sägs vara *kvadratisk* om $m = n$. En kvadratisk matris $A = (a_{ik})$ är en *diagonalmatris* om $a_{ik} = 0$ för alla i och k med $i \neq k$, dvs. om den har utseendet

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elementen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, i en kvadratisk matris bildar matrisens *(huvud)diagonal*. En *enhetsmatris* är en diagonalmatris med enbart ettor i diagonalen.

Alla enhetsmatriser betecknas med I. Då man vill framhålla enhetsmatrisens typ n/n, kan man skriva I_n. *Kroneckers delta*,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{om } i = k \\ 0, & \text{om } i \neq k \end{cases}$$

är den gängse beteckningen för matriselementen i en enhetsmatris: $I = (\delta_{ik})$. En *uppåt* respektive *nedåt triangulär* matris har den allmänna formen

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ & & & * \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & & & \\ * & * & & \\ - & - & - & - \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

där vi har använt konventionen att **en stjärna symboliserar vilket tal som helst** medan **ett tomrum står för en nolla**.

Addition och multiplikation med skalär

Vi skall nu definiera två räkneoperationer för matriser. Antag att $A = (a_{ik})$ och $B = (b_{ik})$ är två matriser av samma typ m/n och låt λ vara ett reellt tal, en *skalär*.

Definition 2.2. *Addition* av matriser definieras genom

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}),$$

dvs. matriser adderas så att motsvarande matriselement adderas. *Multiplikation med skalär* definieras genom

$$\lambda A = (\lambda a_{ik}),$$

dvs. en matris multipliceras med en skalär λ så att varje matriselement multipliceras med λ.

Exempel 2.2. Vi har t.ex. att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Följande egenskaper (räkneregler) kan lätt verifieras för addition och multiplikation med skalär: Om A, B, C är m/n-matriser och α och β är reella tal, dvs. skalärer, så gäller:

(i) $A + B = B + A$ (kommutationslagen);
$(A + B) + C = A + (B + C)$ (associationslagen);

$A + 0 = A$;

Mot varje matris A svarar en matris A', sådan att $A + A' = 0$ (välj $A' = (-1)A$).

(ii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

$1\,A = A$;

$0\,A = 0$;

$\alpha 0 = 0$.

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributionslag);

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributionslag).

Som ett exempel verifierar vi kommutationslagen för matriser med hjälp av kommutationslagen för reella tal: Om $A = (a_{ik})$ och $B = (b_{ik})$, är uppenbarligen

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}) = (b_{ik} + a_{ik}) = B + A\,.$$

Matrismultiplikation

Vi inför ännu en räkneoperation för matriser, nämligen multiplikation av matriser med varann. Ett exempel motiverar de definitioner som skall slås fast:

Exempel 2.3. Betrakta ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 6\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Med detta system är det naturligt att associera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

den s.k. *koefficientmatrisen*, och kolonnvektorerna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vi vill definiera matrisprodukten $A\mathbf{x}$ av A och $\mathbf{x}$ så, att systemet (1) kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Detta betyder att vår definition måste bli sådan att

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \end{pmatrix}.$$

För att få t.ex. det andra elementet $2x_1 - x_2 + x_3$ i matrisprodukten $A\mathbf{x}$, väljer vi den andra raden $\overline{\mathbf{a}}_2$ i A och bildar summan av produkterna av element på motsvarande platser i $\overline{\mathbf{a}}_2$ och $\mathbf{x}$.

Exemplet visar hur definitionerna bör göras:

Definition 2.3. Produkten av en radvektor $\mathbf{a}$ och en kolonnvektor $\mathbf{b}$ med lika många element är en 1/1-matris definierad genom

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (\,a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\,)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\,.$$

Man identifierar sedan 1/1-matrisen $(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$ med talet $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

Definition 2.4. Produkten $A\mathbf{x}$ av en

$$m/n\text{-matris } A = (a_{ik}) \text{ och en kolonnvektor } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ av typ } n/1,$$

är en kolonnvektor av typ $m/1$, i vilken element nummer i fås som produkten $\overline{\mathbf{a}}_i\mathbf{x}$ av rad i i A med $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1\mathbf{x} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_m\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar element nummer i i $A\mathbf{x}$ med $(A\mathbf{x})_i$, är alltså

$$(A\mathbf{x})_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Det är här på sin plats att göra en nyttig observation. I exempel 2.4 ovan får vi enligt reglerna för addition och multiplikation med skalär

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 2x_1 \\ 1x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -1x_2 \\ 1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 1x_3 \\ -1x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$A\mathbf{x}$ är en så kallad *linjärkombination* av kolonnerna i A. Koefficienten framför varje kolonn är motsvarande komponent i vektorn $\mathbf{x}$.

Allmänt bevisas på samma sätt som ovan:

Sats 2.1. *Om $A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\,)$ är en m/n-matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ och $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med komponenterna x_1, x_2, …, x_n, så gäller att $A\mathbf{x}$ är en* linjärkombination,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\,,$$

av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_n$.

Låt oss nu anta att A är en m/n-matris och att $B = (\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p)$ är en n/p-matris. Då är B:s kolonner $\mathbf{b}_j$ av typen $n/1$, så att produkterna $A\mathbf{b}_j$ kan bildas.

Definition 2.5. Med matrisprodukten AB av de ovannämnda matriserna avses den matris vars kolonner (i ordningsföljd) är $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p$, dvs.

$$AB = (A\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p) .$$

Hur ser matriselementet $(AB)_{ik}$ på platsen (i,k) i matrisen AB ut? Enligt definitionen är $(AB)_{ik}$ element nummer i i kolonnen $A\mathbf{b}_k$, dvs. produkten av **rad** i i A med **kolonn** k i B $(= \mathbf{b}_k)$,

$$\begin{aligned}(AB)_{ik} &= (a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} .\end{aligned}$$

Vi sammanfattar tre sätt att se på matrismultiplikationen i en sats:

Sats 2.2. *Låt A vara en m/n-matris och B en n/p-matris. Vi betecknar raderna i A med $\bar{\mathbf{a}}_i$ och kolonnerna i B med $\mathbf{b}_k$ så att*

$$A = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = (\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p) .$$

Då gäller:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} ; \\ &(ii) \qquad AB = (A\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p) ; \\ &(iii) \qquad AB = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m B \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Bevis. Vi har redan verifierat (i) medan (ii) är själva definitionsuttrycket. Då återstår det bara att verifiera (iii): Enligt definitionerna 2.5 och 2.4 är

$$AB = (A\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_1\mathbf{b}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m\mathbf{b}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_m\mathbf{b}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 B \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m B \end{pmatrix} . \diamondsuit$$

Anmärkning. Observera att produkten av två matriser A och B av typen m/n respektive p/q är definierad bara om $n = p$ och att AB då detta gäller kommer att vara av typen m/q. Om $n \neq p$ så är produkten AB alltså inte definierad.

Exempel 2.4. En produkt av två matriser av typerna 3/2 och 2/2 är definierad och resultatet blir en 3/2-matris:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5+1\cdot 7 & 2\cdot 6+1\cdot 8 \\ 4\cdot 5+3\cdot 7 & 4\cdot 6+3\cdot 8 \\ -2\cdot 5-1\cdot 7 & -2\cdot 6-1\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 41 & 48 \\ -17 & -20 \end{pmatrix}.$$

Vi kommer i fortsättningen att behöva en formel rörande summatecken. Giltigheten hos denna formel beror i grunden på att termernas ordningföljd i en summa av tal kan bytas om hur som helst och på att termer kan grupperas med parenteser hur som helst:

Betrakta mn stycken dubbelindicerade tal, som vi skriver i form av ett rektangulärt schema:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}.$$

Om vi först summerar talen i kolonnerna och därefter bildar summan av kolonnsummorna, så får vi

$$\sum_{i,k} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \right).$$

Å andra sidan, om vi först summerar talen i raderna och därefter bildar summan av radsummorna, får vi

$$\sum_{i,k} a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right).$$

Eftersom dessa två summor är lika, fås formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right),$$

som löst uttryckt säger att ordningsföljden på summatecken kan bytas om.

Beteckningen M_{ik} för matriselementet på platsen (i,k) i en matris M är ofta bekväm att använda. Vi använder den i beviset av nästa sats.

Sats 2.3. *(a) Om matrisen A är av typen m/n, B av typen n/p och C av typen p/r, så gäller* associationslagen

$$A(BC) = (AB)C.$$

(b) Om matrisen A är av typen m/n samt B och C av typen n/p, så gäller distributionslagen

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Bevis. (a) För ett matriselement på en godtycklig plats (i,k) i $A(BC)$ är

$$\begin{aligned}(A(BC))_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(BC)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\left(\sum_{l=1}^{p} B_{jl}C_{lk}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} A_{ij}B_{jl}C_{lk} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jl}C_{lk} \\ &= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jl}\right)C_{lk} = \sum_{l=1}^{p}(AB)_{il}C_{lk} = ((AB)C)_{ik}\ ,\end{aligned}$$

dvs. $A(BC) = (AB)C$.

(b) För ett matriselement på en godtycklig plats (i,k) i $A(B+C)$ är

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(B+C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(B_{jk}+C_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(A_{ij}B_{jk}+A_{ij}C_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}C_{jk} = (AB+AC)_{ik}\ ,\end{aligned}$$

dvs. $A(B+C) = AB + AC$. $\diamondsuit$

Märk 1. Multiplikation med en enhetsmatris är speciellt enkel, dvs.

$$IA = A \quad \text{och} \quad AI = A$$

om matrisprodukterna är definierade.

Märk 2. Matrismultiplikationen behöver **inte** vara **kommutativ**. Om A är av typen m/n och B av typen n/p, så är AB definierat medan BA inte är definierat om $m \neq p$. Men också då $m = p$ kan AB och BA vara olika, vilket följande exempel visar:

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Märk 3. En matrisprodukt kan kan bli noll utan att någondera faktorn är noll:

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

På grund av detta behöver förkortningsregeln inte gälla, dvs. ur $AB = AC$ behöver inte följa att $B = C$. Med samma matriser A och B som nyss kan vi välja $C = 0$. Då är ju $AB = 0 = AC$ men $B \neq C$.

Transponerade matriser

Låt A vara en godtycklig m/n-matris.

Definition 2.6. Med A:s *transponerade* matris A^T (ofta uttalat "A-transponat") förstås den matris som fås då man i A låter rader och kolonner byta plats.

Om A är av typen m/n, är A^T av typen n/m. Vidare gäller för matriselementen i dessa matriser att $(A^T)_{ik} = A_{ki}$.

Exempel 2.5. Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{så är} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

För transponeringsoperationen gäller följande räkneregler:

Sats 2.4. *Om A och B är matriser av sådan typ att ifrågakommande operationer är definierade och om $\lambda \in \mathbf{R}$, är*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & (A+B)^T = A^T + B^T\,, \\
(ii) \quad & (\lambda A)^T = \lambda A^T\,, \\
(iii) \quad & (AB)^T = B^T A^T\,, \\
(iv) \quad & (A^T)^T = A\,.
\end{aligned}$$

Bevis. Vi bevisar t.ex. regel (iii): Matriselementet på en godtycklig plats (k,i) i $(AB)^T$ är

$$\begin{aligned}
((AB)^T)_{ki} = (AB)_{ik} &= \sum_j A_{ij} B_{jk} = \sum_j (A^T)_{ji} (B^T)_{kj} \\
&= \sum_j (B^T)_{kj} (A^T)_{ji} = (B^T A^T)_{ki}\,.
\end{aligned}$$

Således gäller regeln (iii). $\diamondsuit$

Anmärkning. En följd av detta är en annan variant av distributionslagen än den i Sats 2.3: Om matriserna A, B och C är sådana att ifrågakommande operationer är definierade, är

$$(A+B)C = AC + BC\,. \tag{2}$$

Enligt Sats 2.3 är nämligen $C^T(A^T + B^T) = C^T A^T + C^T B^T$ och genom att transponera bägge leden och tillämpa reglerna i Sats 2.4 fås (2).

Övningsuppgifter

1. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Räkna också ut $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Bestäm alla kolonnvektorer $\mathbf{x}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Lös matrisekvationen $AX = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Låt x_n och y_n beteckna invånarantalet i centrum respektive förorterna i en stad år n. Årligen flyttar 3% av mänskorna i centrum ut till förorterna och 2% av förortsbefolkningen in till centrum. Dessutom flyttar 1% av hela invånartalet från orten (från varje stadsdel) varje år medan 500 flyttar till staden. Av de sistnämnda bosätter sig 50 i centrum medan 450 bosätter sig i förorterna. Bestäm de rekursionsformler, som ger x_{n+1} och y_{n+1} uttryckta med hjälp av x_n och y_n samt skriv dessa i matrisform (A är en 2/2-matris):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

5. Bestäm mängden $\mathcal{M}$ av alla matriser X som kommuterar med $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, dvs. som har egenskapen $XA = AX$.

6. Om A är en kvadratisk matris så definieras *spåret* av A (betecknas $\mathrm{tr}(A)$ eller $\mathrm{sp}(A)$) som summan av (huvud)diagonalelementen i A.

   (a) Visa att $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ och $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$, $(\lambda \in \mathbf{R})$.

   (b) Bevisa att om B är av typen m/n och C av typen n/m så är $\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$.

7. Visa att om A är en godtycklig matris så är AA^T och A^TA symmetriska (en matris M är *symmetrisk* om $M^T = M$). Visa med exempel att dessa två produkter inte behöver vara lika. Visa också att $A + A^T$ är symmetrisk, om A är kvadratisk. Hur är det med $A - A^T$?

8. (a) Visa att det inte finns några 2/2-matriser A och B sådana att $AB - BA = I$ genom att studera det ekvationssystem som matrisekvationen definierar ($A - B$ betyder $A + (-1)B$).

   (b) Visa att ekvationen $AB - BA = I$ är omöjlig för vilka n/n-matriser A och B som helst. Ledning: Använd uppgift 6.

9. Bevisa att om matrisekvationen $AX = B$ har fler än en lösning, så har den oändligt många. Ledning: Om X_1 och X_2 är lösningar, undersök $X_3 = sX_1 + tX_2$ ($s, t \in \mathbf{R}$).

10. En kvadratisk matris sägs vara *idempotent*, om $A^2 = A$.

 (a) Visa att
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{är idempotent.}$$

 (b) Visa att om $AB = A$ och $BA = B$, så är A och B idempotenta.

11. Sök en matris A som satisfierar ekvationen
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Undersök om det finns någon matris A som satisfierar ekvationen
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. En kvadratisk matris $A = (a_{ik})$ sägs vara *stokastisk* om $a_{ik} \geq 0$, för varje i och k, och om alla kolonnsummor blir 1 (dvs. $\sum_i a_{ik} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$). Visa att produkten av två stokastiska matriser är en stokastisk matris.

14. Visa att om A är en idempotent matris, så är också följande matriser idempotenta
$$(a) \quad A^T, \qquad (b) \quad I - A, \qquad (c) \quad A^n, \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

15. Låt $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ och $C = (c_{ik})$ beteckna m/n-matriser.

 (a) Antag först att $\mathbf{y}^T C\mathbf{x} = 0$ för alla kolonnvektorer $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}$ av typerna $m/1$ respektive $n/1$. Visa att $\mathbf{e}_i^T C\mathbf{e}_k = c_{ik}$, där $\mathbf{e}_j = (\ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots)^T$ har en etta som j:te komponent men i övrigt består av nollor. Dra slutsatsen att $C = 0$.

 (b) Visa med hjälp av (a) att om $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T B\mathbf{x}$ för alla sådana $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}$ som i (a), så är $A = B$.

 (c) Visa med hjälp av (b) att om $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ för varje $n/1$-vektor $\mathbf{x}$, så är $A = B$.

16. Lös matrisekvationen
$$\begin{pmatrix} a + 2b & 3a - b \\ c + 2d & 3c - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Proteiner (P), kolhydrater (K) och fetter (F) bör finnas i en viss foderblandning i förhållandena 33 : 45 : 3. Dessa förekommer (mätt i gram per 100 g) i fettfri mjölk (M), sojamjöl (S) och vassla (V) enligt tabellen

	(M)	(S)	(V)
(P)	36	51	13
(K)	52	34	74
(F)	0	7	1

.

Bestäm (om möjligt) en blandning som ger de rätta proportionerna. (Använd decimaltal i kalkylerna.)

18. Låt $\mathbf{x}$ vara en $1/n$-radvektor och B en n/p-matris. Visa att matrisprodukten $\mathbf{x}B$ kan skrivas som en linjärkombination av raderna i B.

19. Låt A vara en m/n-matris sådan att AA^T är en m/m-nollmatris. Visa att $A = 0$.

20. Ställ upp ett ekvationssystem, vilkets lösning anger hur många molekyler x_i av varje slag som bör skrivas in i den kemiska formeln för att antalet atomer av de olika grundämnena skall vara detsamma både före och efter reaktionen:

$$(a)\quad \mathrm{x_1\,MnS + x_2\,As_2Cr_{10}O_{35} + x_3\,H_2SO_4} \to$$
$$\mathrm{x_4\,HMnO_4 + x_5\,AsH_3 + x_6\,CrS_3O_{12} + x_7\,H_2O}\,,$$
$$(b)\quad \mathrm{x_1\,PbN_6 + x_2\,CrMn_2O_8 \to x_3\,Pb_3O_4 + x_4\,Cr_2O_3 + x_5\,MnO_2 + x_6\,NO}\,.$$
$$(c)\quad \mathrm{x_1\,NaHCO_3 + x_2\,H_3C_6H_5O_7 \to x_3\,Na_3C_6H_5O_7 + x_4\,H_2O + x_5\,CO_2}\,.$$

21. Betrakta en ekonomi bestående av tre sektorer: Kemikalier & Metaller (K), Energi (E) och Maskiner (M). Antag att varje sektor säljer en viss procent av sin produktion till de två andra enligt schemet

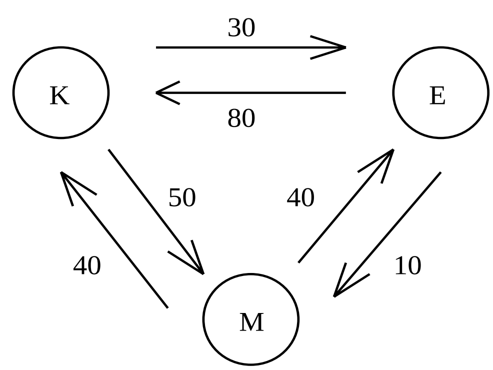

fig. 1

och använder resten själv. Bestäm priset på varje sektors produktion (per tidsenhet) så att ekonomin är i balans (varje sektors utgifter är lika stora som sektorns inkomster). Bortse från andra inkomster och utgifter än de som härrör från ovannämnda handel.

22. En bjälke, som stöds under bägge ändorna, påverkas av tre krafter f_1, f_2, f_3 som i fig. 2, varvid bjälken förskjuts nedåt sträckorna y_1, y_2, y_3. Låt $\mathbf{f}$ och $\mathbf{y}$ vara

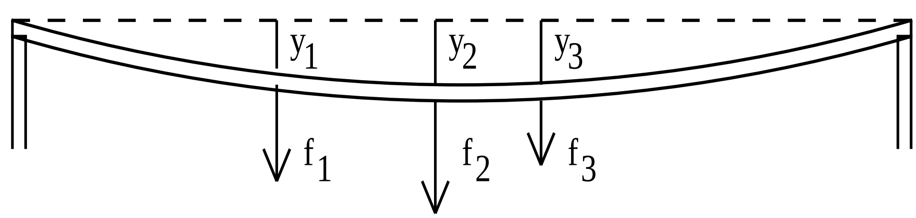

fig. 2

kolonnvektorerna med komponenterna f_i respektive y_i. Enligt Hookes lag är $\mathbf{y} = D\mathbf{f}$, där D är en 3/3-matris. Förklara hur kolonnerna i D (flexibilitetsmatrisen) kan bestämmas (mätas) genom att applicera lämpliga krafter. Vilken fysikalisk tolkning har kolonnerna i D^{-1} (styvhetsmatrisen)?

23. (*a*) I fig. 3 (a) är tvärsnittet genom en metallbjälke uppritad. Den vänstra, högra, övre respektive undre sidan av bjälken har av yttre orsaker temperaturen 10°C, 40°C, 30°C respektive 20°C grader. Eftersom termisk jämvikt antas råda, är temperaturen T_k i varje nod (noderna är utmärkta med cirklar i figurerna) approximativt medeltalet av temperaturerna i de angränsande noderna (t.ex. är $4T_1 = 10 + 30 + T_2 + T_3$). Bestäm temperaturen i varje nod.

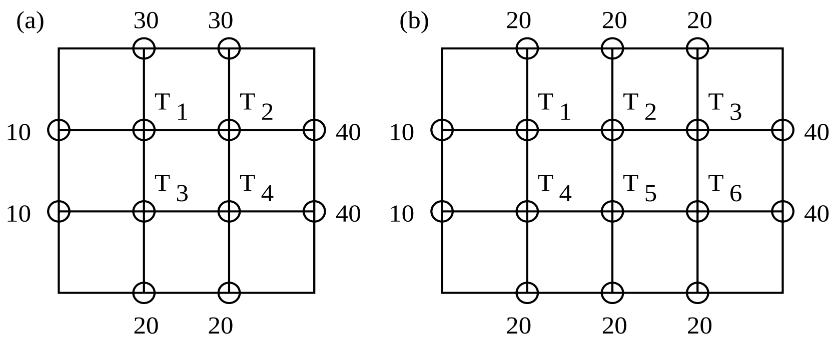

fig. 3

(*b*) Gör detsamma för tvärsnittet i fig. 3 (b). Ledning: Utnyttja symmetrin i temperaturfördelningen för att förenkla kalkylerna.