1. Gausseliminering

Vi skall till att börja med söka lösningen (lösningarna) till ett så kallat *linjärt ekvationssystem.* Ett sådant system med m ekvationer och n obekanta ($m, n \in \mathbf{Z}_+$) har formen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - &\quad - \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Talen a_{ik} och b_i ($i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$ är givna reella tal och symbolerna x_j ($j = 1, \ldots, n$) är så kallade *obekanta* (ibland också kallade *variabler*). Att *lösa* systemet innebär att finna alla n-tiplar $(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ som satisfierar alla ekvationer i systemet.

Det finns olika metoder för lösning av (1). Den mest praktiska är metoden med Gausseliminering. Det är också den som man använder då man löser ett linjärt ekvationssystem på dator.

Triangulära system och system i echelonform

Låt oss se på ett exempel:

Exempel 1.1. För ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - \ \ x_3 &= 5 \\
x_2 + \ \ x_3 &= 3 \\
3x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

är lösningsmetoden självklar: Först löses den tredje ekvationen och man får $x_3 = 2$. Detta utnyttjas sedan i ekvation två, som ger $x_2 = 3 - x_3 = 3 - 2 = 1$. Slutligen ger den första ekvationen, att $x_1 = (5 - x_2 + x_3)/2 = 3$. Man får den entydiga lösningen $(x_1,\, x_2,\, x_3) = (3,\, 1,\, 2)$.

Definition 1.1. Om alla obekanta i ekvationssystem (1) är lika med antalet ekvationer sägs systemet vara *kvadratiskt.* Ett kvadratiskt system sägs vara *uppåt triangulärt* om $a_{ik} = 0$ så snart $k < i$ och *nedåt triangulärt* om $a_{ik} = 0$ så snart $k > i$.

Alla uppåt triangulära system, sådana att $a_{ii} \neq 0$ för alla i, kan som i exempel 1.1 lösas genom s.k. *bakåtsubstitution*: Man börjar med den sista ekvationen, som ger värdet på den sista obekanta, och får tidigare obekanta i tur och ordning genom insättning av redan kända värden. Som de följande exemplen visar behöver systemet ingalunda vara triangulärt för att denna lösningsmetodik skall fungera.

Exempel 1.2. Systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 6 \end{aligned}$$

är inte triangulärt (det är ju inte kvadratiskt). Ger vi däremot x_4 ett godtyckligt värde s ($s \in \mathbf{R}$), som sedan betraktas som bekant, och skriver om systemet,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 - s \\ x_2 + x_3 &= 3 + s \\ 3x_3 &= 6 - 6s\,, \end{aligned}$$

så blir det triangulärt i de obekanta x_1, x_2, x_3 och kan lösas genom bakåtsubstitution. Lösningsmängden blir mängden av alla lösningar

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 3s \\ x_2 &= 1 + 3s \quad (s \in \mathbf{R}) \\ x_3 &= 2 - 2s\,. \end{aligned}$$

Vi säger att x_4 är en *fri variabel*, eftersom vi ju valde denna godtyckligt (fritt). De övriga variablerna x_1, x_2 och x_3 är *basvariabler*.

Exempel 1.3. Systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= -1 \\ x_4 - 2x_5 &= 4 \end{aligned}$$

är triangulärt i variablerna x_1, x_3 och x_4. De två övriga får bli fria variabler och tilldelas godtyckliga värden: $x_2 = s$, $x_5 = t$ ($s, t \in \mathbf{R}$). Lösningen, som fås genom bakåtsubstitution, blir

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 = & 13 & -2s & +8t & \\ x_2 = & -5 & & -3t\ , & \quad (s, t \in \mathbf{R}) \\ x_3 = & 4 & & +2t & \end{array}$$

Systemen i exemplen 1.1-1.3 sägs ha s.k. echelonform:

Definition 1.2. Ett system har *echelonform* om den första icke-noll-termen (dvs. en term med koefficienten $a_{ij} \neq 0$) i varje ekvation ligger längre till höger än i föregående ekvation. Den första koefficienten olik noll i varje rad sägs då vara ett *pivotelement*.

Exempel 1.4. Varje uppåt triangulärt system är uppenbarligen i echelonform.

Det är klart att **högst ett pivotelement är associerat med varje obekant** och att det **finns högst lika många pivotelement som det finns rader**. De obekanta (eller variabler) som är förbundna med något pivotelement är just de som vi i exemplen kallat *basvariabler* medan de övriga kallats *fria variabler*. Varje system i echelonform kan skrivas som ett triangulärt system i sina basvariabler genom att man flyttar alla termer som innehåller fria variabler till ekvationernas högra led.

Omformning till echelonform

Definition 1.3. Två ekvationssystem sägs vara *ekvivalenta* om de har samma lösningsmängd.

Anmärkning. Denna definition på ekvivalens är den mest praktiska för våra behov. Man kan visa att två system (S_1) och (S_2) är ekvivalenta i ovanstående mening om och endast om de är ekvivalenta i logisk mening: $(S_1) \iff (S_2)$. Beviset för detta kräver emellertid en väsentlig del av den teori som vi står i beråd att utveckla.

Vår strävan är nu att skriva ett linjärt ekvationssystem i form av ett echelonsystem, som är ekvivalent med det givna systemet. Lösningarna kan ju sedan fås genom bakåtsubstitution. Metodiken framgår genom några exempel.

Exempel 1.5. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \quad (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \quad (2) \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 1 \quad (3)\,, \end{aligned}$$

där vi har numrerat ekvationerna för att lättare kunna förklara vad vi gör. Först bildar vi ett nytt system genom att *eliminera* x_1 ur (2) och (3) med hjälp av (1). Detta tillgår så, att vi multiplicerar bägge leden i (1) med talet 2 och subtraherar resultatet från (2). Då försvinner den term som innehåller x_1 ur (2). På samma sätt subtraherar vi 1 gånger (1) från (3), varvid termen innehållande x_1 försvinner ur (3). Dessa operationer kan i symbolspråk uttryckas genom

$$\begin{aligned} (2) &\to (2) - 2(1) \\ (3) &\to (3) - 1(1)\,, \end{aligned}$$

där t.ex. den första raden kan utläsas "ersätt rad (2) med rad (2) minus 2 gånger rad (1)". Det nya systemet blir nu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \quad (1') \\ x_2 - 5x_3 &= -3 \quad (2') \\ 2x_2 - 9x_3 &= -5 \quad (3')\,. \end{aligned}$$

Det system som bildas av $(2')$ och $(3')$ behandlas sedan enligt samma mönster, dvs. x_2 elimineras ur $(3')$ genom att man utför operationen

$$(3') \to (3') - 2(2')\,,$$

och man får ett system i echelonform (det är t.o.m. triangulärt):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - 5x_3 &= -3 \\ x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Lösningen fås nu genom bakåtsubstitution och visar sig bli $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$.

Den operation som vi använt i föregående exempel kallar vi

Basoperation 1 ($BO1$): *Subtrahera en multipel av en ekvation från en* annan *ekvation:*

$$(i) \to (i) - \lambda(k) \quad (i \neq k)\,.$$

Denna basoperation har vi anledning att dela upp i två litet strängare delar:

($BO1^+$) *Subtrahera en multipel av en ekvation från en* senare *ekvation.*

($BO1^-$) *Subtrahera en multipel av en ekvation från en* tidigare *ekvation.*

Andra operationer, som uppenbarligen kan användas på ett system utan att systemets lösningmängd ändras, är

Basoperation 2 ($BO2$): *Två ekvationer, säg* (i) *och* (k)*, byter plats:*

$$(i) \leftrightarrow (k)\,.$$

Basoperation 3 ($BO3$): *En ekvation, säg ekvation* (i)*, multipliceras med ett tal* λ *som inte är* 0*:*

$$(i) \to \lambda(i)\,.$$

Anmärkning. Basoperationerna $(BO1)-(BO3)$ är beroende av varandra. Man finner t.ex. lätt att $(BO2)$ kan härledas ur $(BO1)$ och $(BO3)$, vilket ju gör $(BO2)$ överflödig ur teoretisk synvinkel. Vid praktiska kalkyler är det emellertid bäst att ha tillgång till dessa tre enkla regler.

En viktig sak återstår att verifiera, nämligen

Sats 1.1. *De tre basoperationerna* $(BO1)-(BO3)$*, tillämpade på ett ekvationssystem, ger upphov till ett system som är ekvivalent med det ursprungliga.*

Bevis. Om man låter två ekvationer byta plats i ett system, så går det ju att byta tillbaka, och om man multiplicerar en ekvation med λ $(\neq 0)$, så kan man sedan multiplicera samma ekvation med $1/\lambda$ och på det sätter återställa det ursprungliga systemet. Det är därför trivialt att användning av $(BO2)$ och $(BO3)$ ger upphov till nya system, som är ekvivalenta med det ursprungliga. Nästan lika enkelt är det att bevisa satsens påstående för $(BO1)$:

Om vi tillämpar operationen $(k) \to (k) - \lambda(i)$ på systemet

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \quad\vdots \\ V_i = b_i \quad (i) \\ \quad\vdots \\ V_k = b_k \quad (k) \\ \quad\vdots \end{cases},$$

där de vänstra leden kort betecknats med V_j, så får vi

$$(S_2) \qquad \begin{cases} \qquad \vdots & \\ \quad V_i = b_i & (i') \\ \qquad \vdots & \\ V_k - \lambda V_i = b_k - \lambda b_i & (k') \\ \qquad \vdots & . \end{cases}$$

Och omvänt, om vi använder operationen $(k') \to (k') + \lambda(i')$ på (S_2), så återfår vi (S_1). Således är systemen (S_1) och (S_2) ekvivalenta. $\diamondsuit$

Vi kan sammanfatta proceduren för hur man överför ett system på echelonform i en algoritm:

Algoritm för echelonform:

1. Permutera ekvationerna (dvs. använd $(BO2)$), så att koefficienten för den 1:a variabeln i den 1:a ekvationen är olik 0, om detta är möjligt. I annat fall, betrakta nästa variabel som den första och gör samma sak om det är möjligt, osv.
2. Eliminera den första variabeln ur de övriga ekvationerna (använd $(BO1^+)$).

3a. Upprepa genom att tillämpa 1. och 2. på det mindre system som uppstår då man bortser från den första ekvationen.

3b. Sluta då det mindre systemet innehåller bara en ekvation eller ingen variabel alls.

Räkneschemat

Då man Gausseliminerar är det faktiskt bara koefficienterna framför variablerna och talen i högerleden som spelar någon roll. Man kan i själva verket utföra elimineringen helt och hållet i ett räkneschema (= matris), som innehåller enbart dessa tal:

Exempel 1.6. Om systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

skall omformas till echelonform, skriver man det först som ett räkneschema

$$(2) \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & | & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & | & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Utgående från (2) ger nu elimineringen följande räknescheman, där en pil antyder att basoperationer har använts för att få fram nästa räkneschema:

$$S \overset{BO1^+}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \overset{BO1^+}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Fullständigt utskriven blir echelonformen alltså

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ 0 &= 3\,. \end{aligned}$$

Den tredje ekvationen är inkonsistent, dvs. falsk (se definitionen nedan). Systemet saknar alltså lösning.

Definition 1.4. En ekvation eller ett ekvationssystem är *konsistent* om (minst) en lösning existerar och *inkonsistent* om lösningar saknas.

Exempel 1.7. Vi skall lösa systemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

och överför det först i echelonform,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \overset{BO1^+}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \overset{BO1^+}{\to} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & | & 1 \end{pmatrix} \overset{BO1^+}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = S\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Det sista räkneschemet S svarar mot echelonformen

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_2 - x_3 &= 0 \\ \frac{2}{3}x_3 &= 1 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Lösningen fås sedan genom bakåtsubstitution, dvs. vi sätter in värdet $x_3 = 3/2$ i den andra ekvationen, vilket ger x_2 osv. Men **precis samma bakåtsubstitutionen kan också göras i ett räkneschema** med hjälp av $(BO1^-)$. Man utgår då från det sista räkneschemat S i (3) och börjar med att eliminera koefficienterna för x_3 ur de två första ekvationerna med hjälp av den tredje:

$$\begin{aligned} S \overset{BO3}{\to} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \overset{BO1^-}{\to} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & -3 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{BO1^-}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösningen kan avläsas längst till höger i det sista schemat: $x_1 = 0$, $x_2 = -1/2$ och $x_3 = 3/2$.

Det sista räkneschemat är av en alldeles speciell form, reducerad echelonform:

Definition 1.4. Ett räkneschema (= matris) som svarar mot ett system i echelonform kallas en *echelonmatris*. En echelonmatris, i vilken alla pivotelement är ettor och dessa ettor är de enda som inte är noll i sin kolonn (= kolumn) sägs vara i *reducerad echelonform.*

Exempel 1.8. T.ex. det sista räkneschemat i exempel 1.7 och t.ex. varje räkneschema av formen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right),$$

där varje stjärna står för ett godtyckligt tal, är i reducerad echelonform. De variabler som svarar mot pivotkolonner, dvs. x_2, x_4 och x_5, är basvariabler medan de övriga, x_1, x_3 och x_6 är fria variabler.

Lösning av ekvationssystem

Väl motiverade av de tre senaste exemplen kan vi skriva ut en algoritm:

Algoritm för lösning av ett ekvationssystem:

1. Omforma systemet till echelonform (enligt den algoritm som vi har beskrivit tidigare).
2. Sluta om någon ekvation är inkonsistent (systemet saknar lösningar). I annat fall, fortsätt med bakåtsubstitution dvs. med omformning av räkneschemat till reducerad echelonform med hjälp av $(BO1^-)$ och $(BO3)$.

a. Om det inte finns fria variabler fås en entydig lösning.

b. Om det finns fria variabler, så kan basvariablerna skrivas som funktioner av de fria varablerna (de senare ges godtyckliga värden s, $t, \ldots$ och flyttas över till det högra ledet). Det finns alltså oändligt många lösningar.

I fortsättningen använder vi beteckningarna #(ekvationer), #(fria variabler), etc. för antalet ekvationer, antalet fria variabler, etc.

Vi sammanfattar:

Sats 1.2. *Följande gäller för ett linjärt ekvationssystem:*

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Systemet konsistent} \\ \#\textit{(fria variabler)} = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \textit{Lösningen är entydig};$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Systemet konsistent} \\ \#\textit{(fria variabler)} > 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \#\textit{(lösningar)} = \infty;$$

$$(c) \quad \#\textit{(fria variabler)} + \#\textit{(basvariabler)} = \#\textit{(variabler)};$$

$$(d) \quad \#\textit{(basvariabler)} = \#\textit{(pivotelement)};$$

$$(e) \quad \#\textit{(basvariabler)} \leq \#\textit{(ekvationer)}.$$

Definition 1.5. Ett linjärt ekvationssysten är *homogent* om varje högerled är en nolla.

Sats 1.3. *Ett homogent system*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad & - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

är alltid konsistent, ty det har åtminstone lösningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (den s.k. triviala lösningen*). Om $m < n$ har systemet oändligt många lösningar.*

Bevis. Det är uppenbart att den triviala lösningen alltid är en lösning till ett homogent system. Antag att $m < n$. Då är #(basvariabler) $\leq m < n$ och enligt Sats 2.3 (c) #(fria variabler) > 0. Eftersom det finns fria variabler, är antalet lösningar oändligt. ♢

Då man löser ett homogent ekvationssystem är det onödigt att skriva ut nollorna i högerledet i räkneschemat. Dessa nollor förblir ju nollor då man använder basoperationer.

Exempel 1.9. Vid lösning av det homogena systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

gör man alltså följande kalkyler med räknescheman

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom variabeln x_2 är fri, sätter vi $x_2 = s$, där s representerar ett godtyckligt tal, och finner lösningarna $x_1 = -2s$, $x_2 = s$, $x_3 = 0$ $(s \in \mathbf{R})$.

Övningsuppgifter

1. Lös systemet

$$\begin{aligned} u + v + w &= -2 \\ 3u + 3v - w &= 6 \\ u - v + w &= -1\,. \end{aligned}$$

2. Lös systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+ x_5 + x_6} &= 2 \\ x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4 + x_5} + x_6 &= 3 \\ x_3 \phantom{{}+ x_4 + x_5 + x_6} &= -1 \\ x_5 + x_6 &= 4\,. \end{aligned}$$

3. Skriv följande system i echelonform

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 4\,. \end{aligned}$$

4. Lös med Gausseliminering

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-x_3} + 2x_4 &= 15 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3+2x_4} &= 17\,. \end{aligned}$$

5. Lös

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad &= 1 \\ x_4 + 2x_5 + x_6 &= -3 \\ x_5 + 2x_6 &= -5\,. \end{aligned}$$

6. Två sjöar A och B är förbundna med en kanal. Under en viss tidsperiod (ett år) simmar 10% av fiskarna från A till B medan 20% av fiskarna i B simmar till A. Om det vid årets slut fanns 20 000 fiskar i A och 3 000 i B, hur många fanns det vid årets början i A respektive B? (Vi antar att antalet fiskar, som föds och dör i respektive sjö, är lika.)

7. Om fiskarna i A och B har samma "rörlighet" som i uppgift 6 och det dessutom är så att antalet fiskar i respektive sjö är lika vid årets början och vid årets slut, vad är förhållandet mellan antalet fiskar i A och antalet fiskar i B?

8. Tre bakteriearter lever samtidigt i ett provrör och livnär sig på tre slag av födoämnen. Antag att en bakterie av en art i ($i = 1, 2, 3$) konsumerar i medeltal a_{ki} enheter av födoämnet k ($k = 1, 2, 3$) per dag. Antag att $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{13} = a_{31} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = a_{32} = 3$ och $a_{33} = 5$. Antag vidare att det tillförs 15 000 enheter av det första födoämnet, 30 000 enheter av det andra och 45 000 av det tredje per dag. Hur många individer av de tre arterna kan leva i provröret, då vi antar att all föda konsumeras?

9. Undersök hur många lösningar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + ay &= a - 2 \\ (2-a)x - 3y &= -1 \end{aligned}$$

har för olika värden på den reella konstanten a. Ange lösningarna.

10. För vilka värden på a har systemet

$$\begin{aligned} (a+2)x + (a+1)y + az &= 0 \\ x \qquad\qquad\qquad - z &= 0 \\ ax + (2a-1)y + (a-2)z &= 0 \end{aligned}$$

icke-triviala lösningar?

11. Antag att de tre punkterna $(1,-5)$, $(-1,1)$ och $(2,7)$ ligger på en parabel $y = ax^2 + bx + c$. Bestäm a, b och c genom att lösa ett linjärt ekvationssystem.
12. Ett arv på 24 000 euro fördelades på tre fonder så, att den andra fonden får dubbelt så mycket som första. Fonderna ger en årlig ränta på 9%, 10% respektive 6% och pengarna i alla tre fonderna avkastar tillsammans 2 210 euro under det första året. Hur mycket pengar sattes i varje fond?
13. Visa att $(BO2)$ följer ur $(BO1)$ och $(BO3)$.