10. Linjära operatorer

En operator är en funktion f, som avbildar en vektor $\mathbf{x}$ på en annan vektor $f(\mathbf{x})$. Funktionsvärdet $f(\mathbf{x})$ och argumentet $\mathbf{x}$ kan tillhöra olika vektorrum. Vi kommer bara att befatta oss med operatorer som är linjära. Linjära operatorer kan nämligen associeras direkt med matriser.

Följande exempel på en linjär operator kan kallas typexemplet för alla linjära operatorer:

Exempel 10.1. Låt A vara en m/n-matris och låt en funktion (dvs. en operator) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ vara definierad genom

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad \text{för varje } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,.$$

Räknereglerna för matrismultiplikation ger att för denna funktion gäller

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \quad \text{och} \\ T(\lambda\mathbf{x}) &= A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda T(\mathbf{x}) \,. \end{aligned}$$

En operator som har dessa egenskaper sägs vara linjär:

Definition 10.1. Låt E och F vara vektorrum. En *linjär operator* T från E till F är en funktion $T : E \to F$, som är definierad för varje argument $\mathbf{x} \in E$, antar sina värden i F och dessutom uppfyller linearitetsvillkoren

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) && \text{för varje } \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in E, \\ T(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda T(\mathbf{x}) && \text{för varje } \mathbf{x} \in E,\ \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Anmärkning. Dessa linearitetsvillkor är uppfyllda också för sammansättningar: Om S och T är linjära operatorer från E till F och om också operatorn $U : F \to G$ är linjär, så är de sammansatta operatorerna $S + T : E \to F$ och $U \circ T : E \to G$ linjära (övningsuppgift 1). Dessa sammansättningar är definierade genom

$$\begin{aligned} (S+T)(\mathbf{x}) &= S(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) \,, \\ (U \circ T)(\mathbf{x}) &= U(T(\mathbf{x})) \,. \end{aligned}$$

Exempel 10.2. Låt P beteckna vektorrummet av alla polynom. Då är deriveringsoperatorn $D : P \to P$, vilkens värde för varje polynom $p \in P$ är definierad som derivatan

$$(D(p))(x) = p'(x) \,,$$

en linjär operator. Välkända deriveringsregler säger ju att

$$\begin{aligned} D(p_1 + p_2) &= p_1' + p_2' = D(p_1) + D(p_2) \,, \\ D(\lambda p) &= \lambda p' = \lambda D(p) \,. \end{aligned}$$

Exempel 10.3. Ett annat exempel på en linjär operator på samma vektorrum P, är den operator $T : P \to P$, som är definierad genom

$$T(p)\,(x) = xp(x)\,.$$

Eftersom $x(p_1(x) + p_2(x)) = xp_1(x) + xp_2(x)$ och $x(\lambda p(x)) = \lambda(xp(x))$, är linearitetsvillkoren uppfyllda.

Sats 10.1. *För en linjär operator $T : E \to F$ från ett vektorrum E till ett vektorrum F gäller:*

(*i*) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,.$

(*ii*) *Om vektorerna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ är linjärt beroende i E så är $T(\mathbf{x}_1), \ldots, T(\mathbf{x}_p)$ linjärt beroende i F.*

Bevis. (*i*) För ett godtyckligt $\mathbf{x} \in E$ är $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{x}) = 0T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
(*ii*) Om $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ är linjärt beroende så existerar icke-triviala koefficienter c_i sådana att $c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$. Men ur linearitetsvillkoren följer då att

$$c_1T(\mathbf{x}_1) + \cdots c_pT(\mathbf{x}_p) = T(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_p\mathbf{x}_p) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,.$$

för samma koefficienter. Alltså är $T(\mathbf{x}_1), \ldots, T(\mathbf{x}_p)$ linjärt beroende. ♢

Vi betraktar ytterligare några exempel på linjära operatorer:

Exempel 10.4. Operatorn $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T,$$

speglar vektorn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ i x_3-axeln.

Exempel 10.5. Operatorn $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}^T,$$

speglar vektorn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ i x_1x_2-planet.

Anmärkning. Om $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ är en bas i ett vektorrum E så blir en linjär operator $T : E \to F$ entydigt definierad om vi fastslår värdena $T(\mathbf{a}_1), \ldots, T(\mathbf{a}_n)$. För ett godtyckligt $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$ är nämligen då med nödvändighet $T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{a}_1) + \ldots + x_nT(\mathbf{a}_n)$ (lineariteten hos T är lätt att verifiera p.g.a. att detta uttryck för $T(\mathbf{x})$ är linjärt i koordinaterna x_i).

Exempel 10.6. Den linjära operator $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som vrider varje vektor en vinkel θ moturs kring origo, kan enligt anmärkningen ovan definieras genom

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

I exemplen 10.4, 10.5 och 10.6 finns det en matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Låt oss t.ex i exempel 10.4 sätta $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, där $\mathbf{y} = (\,y_1 \quad y_2 \quad y_3\,)^T$. Då är

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 \\ y_2 = -x_2\,, \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}\,.$$

För operatorn T i exempel 10.6 får ur $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2)$ att

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Detta är ingen tillfällighet. Vi kommer att se att mot varje linjär operator T från ett n-dimensionellt vektorrum till ett m-dimensionellt vektorrum entydigt svarar en m/n-matris samt att T entydigt kan rekonstrueras ur denna matris. Denna motsvarighet mellan operator och matris är dock beroende av valet av baser i vektorrummen. Vi skall reda ut detta närmare:

Sambandet mellan linjära operatorer och matriser

Låt E och F vara vektorrum och antag att $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ respektive $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ är (numrerade) baser i dessa. Låt dessutom $T : E \to F$ vara en linjär operator.

Varje $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ är entydigt definierat av sina koordinater, som vi sammanfattar i en *koordinatvektor*

$$X = (\,x_1 \quad \dots \quad x_n\,)^T\,.$$

På grund av lineariteten är

$$(1) \qquad T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{b}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{b}_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(\mathbf{b}_k)\,.$$

Varje $T(\mathbf{b}_k)$ i detta uttryck är en linjärkombination av basvektorerna i F,

$$(2) \qquad T(\mathbf{b}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{v}_i\,, \quad (k = 1, \dots, n)\,.$$

Definition 10.1. Den matris som koefficienterna i (2) bildar,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kallas *matrisen för T i baserna* $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$.

Anmärkning. En matris A definierar entydigt en operator T då (de numrerade) baserna är fastslagna. Genom (2) är ju $T(\mathbf{b}_k)$ definierat för $k = 1, \dots, n$ och genom (1) är sedan $T(\mathbf{x})$ definierat för varje $\mathbf{x}$.

Exempel 10.7. Låt operatorn $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara definierad genom

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad \text{där} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är matrisen för T i den naturliga basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ just matrisen A, ty

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (\,1 \quad 2\,)^T = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) &= (\,-1 \quad 1\,)^T = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,. \end{aligned}$$

Betrakta nu den bas i $\mathbf{R}^2$, som består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (\,1 \quad 0\,)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 1\,)^T$. För att få fram matrisen för T i denna nya bas, räknar vi ut

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ T(\mathbf{v}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

och avläser att matrisen för T i basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exempel 10.8. Låt P_k betecknar vektorrummet av polynom av högst graden k ($k = 2, 3$). Betrakta i P_k den bas som består av polynomen $p_j(x) = x^j$ ($j = 0, \ldots, k$). För operatorn $T : P_2 \to P_3$, $T(p)\,(x) = xp(x)$, gäller

$$\begin{aligned} T(p_0)\,(x) &= x\,p_0(x) = x \;= p_1(x) \\ T(p_1)\,(x) &= x\,p_1(x) = x^2 = p_2(x) \\ T(p_2)\,(x) &= x\,p_2(x) = x^3 = p_3(x)\,. \end{aligned}$$

Därför är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisen för T i baserna $\{p_0, p_1, p_2\}$ och $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

Vi går nu tillbaka till det allmänna fallet. Låt $T : E \to F$ vara den linjära operator, som vi betraktade i början av detta avsnitt och som har matrisen A i definition 10.1. Avsikten är att skriva likheten $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ i matrisform. Därför inför vi beteckningarna

$$X = (\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,)^T \qquad \text{och} \qquad Y = (\,y_1 \quad \ldots \quad y_m\,)^T$$

för koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i respektive bas. Genom insättning av i tur och ordning (1) och (2) fås

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(\mathbf{b}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) \mathbf{v}_i\,.$$

Koefficienterna för basvektorerna $\mathbf{v}_i$ måste här vara koordinaterna för $\mathbf{y}$,

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \qquad \text{dvs.} \qquad Y = AX\,.$$

Omvänt kan likheten $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ entydigt härledas ur $Y = AX$, då ju koordinatvektorerna entydigt bestämmer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ och operatorn T, som vi har sett, entydigt kan rekonstrueras ur A.

Vi sammanfattar:

Sats 10.2. *Antag att $T : E \to F$ är en linjär operator mellan vektorrum E och F med baser $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ respektive $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Då gäller ekvivalensen*

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad Y = AX\,,$$

där X och Y betecknar koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i respektive bas och A är matrisen för T i de nämnda baserna.

Anmärkning. Observera att den *identiska operatorn* $Id : E \to E$, definierad genom $Id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, har matrisen I i varje bas i E.

Matrisen för sammansättningar

Låt $T : E \to F$ och $S : F \to G$ vara linjära operatorer mellan ändligtdimensionella vektorrum och betrakta sammansättningen $S \circ T : E \to G$. Vi antar att baser har valts i E, F och G samt att T, S och $S \circ T$ har matriserna B, A respektive C i dessa baser. Enligt Sats 10.2 gäller ekvivalenserna

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \quad &\Longleftrightarrow \quad Y = BX\,, \\ \mathbf{z} = S(\mathbf{y}) \quad &\Longleftrightarrow \quad Z = AY\,, \\ \mathbf{z} = (T \circ S)(\mathbf{x}) \quad &\Longleftrightarrow \quad Z = CX\,, \end{aligned}$$

där X, Y och Z är koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ i respektive bas. Insättning av $Y = BX$ i $Z = AY$ ger $Z = ABX$. Således är

$$CX = ABX \qquad \text{för varje } X,$$

dvs. $C = AB$. Vi har alltså visat:

Sats 10.3. *Antag att baser har valts i de ändligtdimensionella vektorrummen E, F och G. Om de linjära operatorerna $T : E \to F$ och $S : F \to G$ har matriserna B och A i respektive baser så har $S \circ T$ matrisen AB i de valda baserna i E och G.*

Bastransformationer

Som vi har sett, är matrisen för en operator $T : E \to F$ beroende av vilka baser man använder i E och F. Då man byter baser, dvs. utför en bastransformation, ändras matrisen på ett visst sätt. Vi skall studera detta närmare för det fall att operatorn T har både argument och värde i samma vektorrum. Det allmänna fallet behandlas på liknande sätt men är lite mera komplicerat och inte lika viktigt (se sid. 135).

Låt alltså $T : E \to E$ vara en linjär operator med matrisen $A = (a_{ik})$ i basen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ och matrisen $A' = (a'_{ik})$ i den nya basen $\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$:

$$T(\mathbf{b}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{b}_i\,, \qquad T(\mathbf{b}'_k) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}\mathbf{b}'_i\,.$$

Vi söker en formel som anger sambandet mellan A och A'. Det visar sig att vi lätt kan få fram en sådan formel, om vi först utreder hur koordinatvektorer förändras vid basbyten.

Vi skriver de nya basvektorerna som linjärkombinationer av de gamla,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_1 &= c_{11}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{n1}\mathbf{b}_n \\ &- \; - \; - \; - \; - \; - \\ \mathbf{b}'_n &= c_{1n}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{nn}\mathbf{b}_n\,, \end{aligned}$$

eller i kortare form,

$$\mathbf{b}'_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\mathbf{b}_i \qquad (k = 1, \ldots, n)\,. \tag{3}$$

Vi kan då säga att basbytet beskrivs av *basbytesmatrisen* (eller *bastransformationsmatrisen*)

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor i E samt låt $X = (x_i)$ och $X' = (x'_i)$ vara koordinatvektorena för detta $\mathbf{x}$ i den "gamla" respektive den nya basen. Då ger (3) att

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x'_k\mathbf{b}'_k = \sum_{k=1}^{n} x'_n \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x'_k \right) \mathbf{b}_i\,,$$

ur vilket sambandet $x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x'_k$, dvs. $X = CX'$, kan avläsas.

Sats 10.4. *Låt E vara ett vektorrum med en ursprunglig bas $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ och en ny bas $\{\mathbf{b}'_1, \cdots, \mathbf{b}'_n\}$, relaterade genom (3). Då är koordinatvektorerna X respektive X' för en given vektor $\mathbf{x}$ i E i den ursprungliga och den nya basen relaterade genom*

$$X = CX'\,,$$

där C är basbytesmatrisen, som består av koefficienterna i (3).

Anmärkning. $R(C) = \mathbf{R}^n$, eftersom varje $X \in \mathbf{R}^n$ kan fås som en produkt CX'. Följaktligen är C icke-singulär och därmed inverterbar. Alltså är $X' = C^{-1}X$.

Exempel 10.9. Antag att en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbf{R}^2$ har koordinatvektorn $X = (1 \quad 3)^T$ i viss (för oss okänd) bas $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Vi inför en ny (okänd) bas genom att sätta

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1' &= 2\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2\,, \\ \mathbf{b}_2' &= \ \ \mathbf{b}_1 + \ \mathbf{b}_2\,. \end{aligned}$$

Då är basbytesmatrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{som har inversen} \qquad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinatvektorn för $\mathbf{x}$ i den nya basen blir alltså

$$X' = C^{-1}X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi går nu tillbaka till problemet att finna ett samband mellan matriserna A och A' för operatorn T i de två baserna. Låt vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i likheten $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ ha koordinatvektorer X och Y respektive X' och Y' i den ursprungliga respektive den nya basen. Enligt Sats 10.4 är nu $X = CX'$ och $Y = CY'$ och vi får de ekvivalenta relationerna

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX \quad \Leftrightarrow \quad CY' = ACX' \quad \Leftrightarrow \quad Y' = (C^{-1}AC)X'\,,$$

ur vilka vi kan avläsa den sökta formeln $A' = C^{-1}AC$.

Sats 10.5. *Låt E vara ett vektorrum med en ursprunglig bas $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ och en ny bas $\{\mathbf{b}_1', \cdots, \mathbf{b}_n'\}$ och låt baserna vara relaterade genom (3). Om $T : E \to E$ är en linjär operator med matriserna A och A' i den ursprungliga respektive den nya basen, så är dessa matriser relaterade genom*

$$A' = C^{-1}AC\,. \tag{4}$$

Exempel 10.10. Betrakta operatorn $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definierad genom

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Då är A matrisen för T i den naturliga basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Vi skall emellertid bestämma matrisen för T i den bas som består av vektorerna

$$\mathbf{b}_1 = (1 \quad 2 \quad 0)^T\,, \quad \mathbf{b}_2 = (0 \quad 1 \quad 2)^T\,, \quad \mathbf{b}_3 = (2 \quad 0 \quad 1)^T\,.$$

Då är

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Ur detta avläser vi basbytesmatrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ och får genom invertering } C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A' = C^{-1}AC$ för T i basen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ blir nu

$$A' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 & 28 & 23 \\ 7 & 13 & -2 \\ 4 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

I det allmänna fallet då man har en operator $T : E \to F$ och olika baser $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ och $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ i E respektive F så kan man göra olika bastransformationer i de två vektorrummen:

Låt $\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ och $\{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m\}$ vara nya baser i E respektive F. Betrakta likheten $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ och låt X, Y respektive X' och Y' vara koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i de ursprungliga respektive de nya baserna. Låt C och D vara basbytesmatriserna i E respektive F och låt A vara matrisen för T i de ursprungliga baserna. Då är enligt Sats 10.4

$$X = CX' \quad \text{och} \quad Y = DY'.$$

Genom insättning av dessa i $Y = AX$ fås ekvationen $DY' = ACX'$, vilket ger att $Y' = (D^{-1}AC)X'$. Matrisen för T i de nya baserna blir alltså

$$A' = D^{-1}AC.$$

Anmärkning. Eftersom den operation (4), som görs vid en bastransformation, är identisk med den som görs vid diagonalisering, så kan vi tolka diagonalisering av en matris A på följande sätt: Om A är diagonaliserbar, så kan matrisen för den linjära operatorn $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ fås diagonal genom att man väljer ett lämpligt nytt koordinatsystem, dvs. väljer en ny bas. Vi har sett att en diagonalisering alltid är möjlig om A är symmetrisk och att det nya koordinatsystemet då alltid kan väljas ortogonalt. Transformationen till den nya koordinatvektorn, $X' = Q^{-1}X$, förmedlas i detta fall av en ortogonal matris Q. Om A är en 2/2- eller 3/3-matris, kan man t.o.m. visa att Q alltid kan väljas att vara en rotationsmatris.

Inversa operatorer

Antag att $T : E \to E$ är en linjär operator. Eftersom T är en vanlig funktion, existerar den *inversa operatorn* T^{-1} (den inversa funktionen) om och endast om T är bijektiv, dvs. både surjektiv och injektiv. Vi repeterar dessa begrepp:

(i) T sägs vara surjektiv om $\{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in E\} = E$;

(ii) T sägs vara injektiv om $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Om operatorn T^{-1} existerar, är den automatiskt linjär (se övningsuppgift 2).

Vi skall strax visa att villkoren (i) och (ii) i själva verket är ekvivalenta för en linjär operator om E är ändligtdimensionellt. Antag nu att $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en (ändlig) bas i E och låt A och B vara matriserna för T respektive T^{-1} samt X och Y koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$ respektive $\mathbf{y}$ i denna bas. Notera först att relationen $T \circ T^{-1} = Id$ enligt Sats 10.3 medför att $AB = I$, varför $B = A^{-1}$. Följande kedja av ekvivalenser gäller:

$$\begin{array}{rcl}
T \text{ är surjektiv} & \Leftrightarrow & \text{alla } \mathbf{y} \in E \text{ är av formen } \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \\
& \Leftrightarrow & \text{alla } Y \in \mathbf{R}^n \text{ är av formen } Y = AX \\
& \Leftrightarrow & R(A) = \mathbf{R}^n \\
& \Leftrightarrow & \dim R(A) = n \\
A^{-1} \text{ existerar} & \Leftrightarrow & \dim N(A) = 0 \\
& \Leftrightarrow & AX = 0 \text{ bara om } X = 0 \\
& \Leftrightarrow & T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ bara om } \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
& \Leftrightarrow & T \text{ är injektiv}
\end{array}$$

Den sista ekvivalensen bör kanske motiveras: Om vi vet att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ bara om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så gäller:

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}\,.$$

Alltså är T injektiv. Omvänt gäller: Om T är injektiv så följer ur $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ $(= T(\mathbf{0}))$ att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vi sammanfattar allt detta:

Sats 10.6. *Antag att $T : E \to E$ är en linjär operator och att T har matrisen A i en bas $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Följande påståenden är då ekvivalenta:*

(i) *T är surjektiv;*

(ii) *T är injektiv;*

(iii) *T^{-1} existerar;*

(iv) *A^{-1} existerar. Härvid är A^{-1} matrisen för T^{-1} i basen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.*

Exempel 10.11. Betrakta den linjära operator $T : P_2 \to P_2$ på vektorrummet P_2 av polynom av högst graden 2, vilken är definierad av uttrycket $T = D^2 + D + I$, där D betecknar deriveringsoperatorn (se exempel 10.2). Om vi i P_2 betraktar den bas som bildas av $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ och $p_2(x) = x^2$ och räknar ut

$$\begin{aligned}
T(p_0)(x) &= 1 = p_0(x)\,,\\
T(p_1)(x) &= 1 + x = p_0(x) + p_1(x)\,,\\
T(p_2)(x) &= 2 + 2x + x^2 = 2p_0(x) + 2p_1(x) + p_2(x)\,,
\end{aligned}$$

så kan vi avläsa matrisen för T,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom denna är inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kan vi med stöd av Sats 10.6 sluta oss till att den inversa operatorn $T^{-1} : P_2 \to P_2$ existerar. Detta innebär att för varje polynom $g \in P_2$ har differentialekvationen $T(p) = p'' + p' + p = g$ exakt en lösning $p \in P_2$. Denna lösning kan räknas ut med matrismetoder: Om t.ex. $g(x) = 1 + x^2$, så har g koordinatvektorn $G = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^T$. Koordinatvektorn X för p fås då som lösningen till $AX = G$. Man finner att $X = (\,1 \quad -2 \quad 1\,)^T$. Alltså är $p(x) = 1 - 2x + x^2$ den enda lösningen i P_2 till differentialekvationen $p''(x) + p'(x) + p(x) = 1 + x^2$.

Övningsuppgifter

1. Bevisa att om S och T är linjära operatorer, så är också $T \circ S$ en linjär operator.
2. Visa att om $T : E \to E$ är en omvändbar linjär operator (dvs. om T^{-1} existerar) så är också T^{-1} en linjär operator.
3. Kan operatorn T vara linjär om

   (a) $T(\,1 \quad 0 \quad 1\,) = (\,-1 \quad 1 \quad 0\,)$, $\quad T(\,0 \quad 2 \quad 1\,) = (\,0 \quad 2 \quad 0\,)$,
   och $\quad T(\,1 \quad 2 \quad -1\,) = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)$?

   (b) $T(\,2 \quad 4 \quad 2\,) = (\,1 \quad 0 \quad 4\,)$, $\quad T(\,-1 \quad 0 \quad -2\,) = (\,1 \quad 2 \quad 1\,)$,
   och $\quad T(\,1 \quad 4 \quad 0\,) = (\,2 \quad 2 \quad 2\,)$?

   (c) $T(\,1 \quad 1 \quad 1\,) = (\,1 \quad 0 \quad -1\,)$, $\quad T(\,3 \quad 1 \quad -1\,) = (\,0 \quad 1 \quad 1\,)$,
   och $\quad T(\,2 \quad 0 \quad -2\,) = (\,-1 \quad 1 \quad 2\,)$?

4. Vektorrummen E och F har baserna $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ respektive $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ och $T : E \to F$ är en linjär operator, sådan att $T(\mathbf{b}_k) = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k+1}$, $1 \le k \le 3$. Ange matrisen för T i de nämnda baserna.

5. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära operator som i den bas som bildas av $\mathbf{v}_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$ och $\mathbf{v}_3 = (0 \quad 1 \quad -1)^T$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, som är sådana att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

6. Antag att $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ är en bas i $\mathbf{R}^3$. Låt en ny bas $\{\mathbf{b}_1',\ \mathbf{b}_2',\ \mathbf{b}_3'\}$ vara definierad genom

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1' &= \mathbf{b}_1 \phantom{{}+2\mathbf{b}_2} + \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2' &= \phantom{\mathbf{b}_1 + 2}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3' &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 \end{aligned} \quad . \quad \text{Sätt} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att $\{\mathbf{b}_1',\ \mathbf{b}_2',\ \mathbf{b}_3'\}$ är en bas i $\mathbf{R}^3$.

(b) Bestäm matrisen för den linjära operatorn $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ i basen $\{\mathbf{b}_1',\ \mathbf{b}_2',\ \mathbf{b}_3'\}$ om A är matrisen för T i basen $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$.

7. Låt $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2\}$ vara en given bas i $\mathbf{R}^2$. Bestäm en ny bas $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ i $\mathbf{R}^2$ sådan att vektorerna $2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$ och $4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ i denna har koordinaterna 1, 1 respektive 1, -1.

8. Betrakta en linjär operator $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med matrisen A i basen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Vi gör ett basbyte till en ny bas $\{\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_n'\}$ i $\mathbf{R}^n$ enligt formel (3) där basbytesmatrisen är C. Visa att T har samma matris A i den nya basen om och endast om $AC = CA$.

9. Låt $D : P_3 \to P_2$, $(D(p))(x) = p'(x)$, vara deriveringsoperatorn (P_n är vektorrummet av polynom av högst graden n). Betrakta följande baser i de berörda vektorrummen:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, x, x^2, x^3\}, & C_1 &= \{1, x, x^2\}, \\ B_2 &= \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}, & C_2 &= \{1, 1+x, 1+x+x^2\}. \end{aligned}$$

Bestäm matrisen för D i baserna

(a) B_1 och C_1 , (b) B_1 och C_2 , (c) B_2 och C_1 , (d) B_2 och C_2 .

10. Mellan baserna $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ och $\{\mathbf{b}_1',\ \mathbf{b}_2',\ \mathbf{b}_3'\}$ i $\mathbf{R}^3$ råder sambandet

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1' &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2' &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3' &= \phantom{\mathbf{b}_1 + 2}\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 . \end{aligned}$$

En vektor $\mathbf{x}$ har i basen $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ koordinatvektorn $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ och i basen $\{\mathbf{b}_1',\ \mathbf{b}_2',\ \mathbf{b}_3'\}$ koordinatvektorn $(x_1' \quad x_2' \quad x_3')^T$. Ange koordinaterna x_1, x_2 och x_3 uttryckta i x_1', x_2' och x_3'.

11. Antag att vektorerna $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och $\mathbf{b}_3$ har koordinatvektorerna

$$(1 \quad 0 \quad 0)^T, \quad (2 \quad 1 \quad 0)^T, \quad \text{respektive} \quad (3 \quad 2 \quad 1)^T$$

i en bas $\{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \mathbf{b}_3'\}$ i ett vektorrum E. Visa att $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ är en bas i E. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ i basen $\{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \mathbf{b}_3'\}$. Bestäm i basen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ koordinaterna för den vektor vars koordinatvektor i basen $\{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \mathbf{b}_3'\}$ är $(\,2 \quad 0 \quad 7\,)^T$.

12. En linjär operator $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i de naturliga baserna i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$. För en linjär operator $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $S(\mathbf{f}_3) = (\,-1 \quad 1\,)^T$ och att $S \circ T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

i den naturliga basen i $\mathbf{R}^2$. Bestäm matrisen för S i de naturliga baserna.

13. Antag att $T : E \to E$ är en linjär operator och att A och A' är matriser för T i olika baser. Visa att $\det(A) = \det(A')$.

14. Antag att S är speglingsmatrisen i ett hyperplan i $\mathbf{R}^n$ (dvs. i ett $(n-1)$-dimensionellt underrum) samt betrakta den linjära operatorn $T(\mathbf{x}) = S\mathbf{x}$. Visa med hjälp av uppgift 13 att $\det(S) = -1$. Ledning: Välj en ON-bas, i vilken matrisen för T är en diagonalmatris.

15. Betrakta operatorn $T : P_2 \to P_2$,

$$T(p)\,(x) = \int_0^\infty e^{-t} p(x-t)\,dt\,,$$

definierad på (t.ex.) vektorrummet P_2 av polynom av högst graden 2.

(a) Bestäm matrisen A för T i basen $\{1,\, x,\, x^2\}$ och dra av A:s utseende slutsatsen att T^{-1} existerar.

(b) Visa att $T^{-1} = Id + D$ (D är deriveringsoperatorn) **både** genom att invertera A och jämföra med matrisen för $Id + D$ **och** genom att använda partiell integration på uttrycket för $T(p')$.