Ex $S, T : E \to F$ linjära operatorer.

1°) $\underline{(S+T)(x+y)} = S(x+y) + T(x+y)$
$= S(x) + S(y) + T(x) + T(y)$
$= (S(x) + T(x)) + (S(y) + T(y))$
$= \underline{(S+T)(x) + (S+T)(y)}.$

2°) $(S+T)(\lambda x) = S(\lambda x) + T(\lambda x)$
$= \lambda S(x) + \lambda T(x)$
$= \lambda (S(x) + T(x))$
$= \underline{\lambda \cdot (S+T)(x)}.$

$\therefore$ $(S+T) : E \to F$ linjär operator.

Ex $T : P \to \mathbb{R}$ given av

$$T(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \quad \text{för alla } p \in P.$$

1°) $\underline{T(p_1 + p_2)} = \int_0^1 (p_1(x) + p_2(x))\,dx = \int_0^1 p_1(x)\,dx + \int_0^1 p_2(x)\,dx$
$= \underline{T(p_1) + T(p_2)}.$

2°) $\underline{T(\lambda p)} = \int_0^1 \lambda p(x)\,dx = \lambda \int_0^1 p(x)\,dx = \underline{\lambda \cdot T(p)}.$

$\therefore$ $\underline{T \text{ linjär operator.}}$

Ex] 1.10. Visa: S, T linjära operatorer $\Rightarrow T \circ S$ linjär operator.

Ant: $S : E \to F$ linj. operator,
$T : F \to G$ ——— " ———.

1°) $(T \circ S)(x+y) = T(S(x+y)) = T(S(x) + S(y)) = T(S(x)) + T(S(y))$
$= (T \circ S)(x) + (T \circ S)(y)$.

2°) $(T \circ S)(\lambda x) = T(S(\lambda x)) = T(\lambda S(x)) = \lambda T(S(x)) = \lambda \cdot (T \circ S)(x)$

$\therefore T \circ S : E \to G$, linjär operator. $\square$

Ex] 2.10. Ant. $\begin{cases} T : E \to E & \text{linjär operator,} \\ T^{-1} : E \to E & \text{existerar.} \end{cases}$

1°) $w = T^{-1}(u) + T^{-1}(v) \Leftrightarrow T(w) = T(T^{-1}(u) + T^{-1}(v))$
$= T(T^{-1}(u)) + T(T^{-1}(v))$
$= u + v$
$\Leftrightarrow w = T^{-1}(u+v)$

$\therefore T^{-1}(u+v) = T^{-1}(u) + T^{-1}(v)$.

2°) Om $\lambda = 0$ är $T(\underbrace{\lambda u}_{=0}) = 0$. $\therefore T^{-1}(\underbrace{\lambda u}_{=0}) = 0 = 0 \cdot T^{-1}(u)$
$= \lambda \cdot T^{-1}(u)$.

Om $\lambda \neq 0$:

$w = \lambda T^{-1}(u) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot w = T^{-1}(u) \Leftrightarrow T(\frac{1}{\lambda} w) = u$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} T(w) = u \Leftrightarrow T(w) = \lambda u$
$\Leftrightarrow w = T^{-1}(\lambda u)$.

$\therefore T^{-1}(\lambda u) = \lambda T^{-1}(u)$.

$\therefore T^{-1}$ är en linjär operator.

Ex 10.4 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1\ x_2\ x_3)^T = (-x_1\ \ -x_2\ \ x_3)^T$$

1°) $\underline{T((x_1\ x_2\ x_3)^T + (y_1\ y_2\ y_3)^T)}$

$$= T(x_1+y_1\ \ x_2+y_2\ \ x_3+y_3)^T$$

$$= (-x_1-y_1\ \ -x_2-y_2\ \ x_3+y_3)^T$$

$$= (-x_1\ \ -x_2\ \ x_3)^T + (-y_1\ \ -y_2\ \ y_3)^T$$

$$= \underline{T(x_1\ x_2\ x_3)^T + T(y_1\ y_2\ y_3)^T}$$

2°) $\underline{T(\lambda(x_1\ x_2\ x_3)^T)} = T(\lambda x_1\ \ \lambda x_2\ \ \lambda x_3)^T$

$$= (-\lambda x_1\ \ -\lambda x_2\ \ \lambda x_3)^T = \lambda(-x_1\ \ -x_2\ \ x_3)^T = \underline{\lambda \cdot T(x_1\ x_2\ x_3)^T}$$

Anmerkung: $T(x) = x_1 T(a_1) + .. + x_n T(a_n)$

$x+y = (x_1+y_1)a_1 + \ldots + (x_n+y_n)a_n$

1°) $\underline{T(x+y)} = \cancel{(x_1 T(a_1) + \ldots + x_n T(a_n)) + (y_1 T(a_1) + \ldots + y_n T(a_n))}$

$$= (x_1+y_1)T(a_1) + \ldots + (x_n+y_n)T(a_n)$$

$$= (x_1 T(a_1) + \ldots + x_n T(a_n)) + (y_1 T(a_1) + \ldots + y_n T(a_n))$$

$$= \underline{T(x) + T(y)}\ .$$

2°) $\underline{T(\lambda x)} = (\lambda x_1)T(a_1) + \ldots + (\lambda x_n)T(a_n)$

$$= \lambda(x_1 T(a_1) + \ldots + x_n T(a_n))$$

$$= \underline{\lambda T(x)}\ .$$

$E \xrightarrow{T} F$

bas: $\{b_1, \dots, b_n\}$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ bas

Varje $T(\mathbf{b}_k)$ i detta uttryck är en linjärkombination av basvektorerna i F,

$$(2) \qquad T(\mathbf{b}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{v}_i\,, \qquad (k = 1, \dots, n)\,.$$

Definition 10.1. Den matris som koefficienterna i (2) bildar,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(b_1) & - - & T(b_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array},$$

kallas *matrisen för T i baserna* $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$.

Anmärkning. En matris A definierar entydigt en operator T då (de numrerade) baserna är fastslagna. Genom (2) är ju $T(\mathbf{b}_k)$ definierat för $k = 1, \dots, n$ och genom (1) är sedan $T(\mathbf{x})$ definierat för varje $\mathbf{x}$.

Exempel 10.7. Låt operatorn $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara definierad genom

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad \text{där} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Då är matrisen för T i den naturliga basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ just matrisen A, ty

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = (1 \quad 2)^T = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) = (-1 \quad 1)^T = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \,. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} A \underset{}{\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Betrakta nu den bas i $\mathbf{R}^2$, som består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1 \quad 0)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (1 \quad 1)^T$. För att få fram matrisen för T i denna nya bas, räknar vi ut

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ T(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

och avläser att matrisen för T i basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exempel 10.8. Låt P_k betecknar vektorrummet av polynom av högst graden k ($k = 2, 3$). Betrakta i P_k den bas som består av polynomen $p_j(x) = x^j$ ($j = 0, \ldots, k$). För

$\{1, x, \ldots, x^k\}$

operatorn $T : P_2 \to P_3$, $T(p)(x) = xp(x)$, gäller

$$T(p_0)(x) = x\,p_0(x) = x = p_1(x) = 0\cdot p_0(x) + 1\cdot p_1(x) + 0\cdot p_2(x) + 0\cdot p_3(x)$$
$$T(p_1)(x) = x\,p_1(x) = x^2 = p_2(x) = 0\cdot p_0(x) + 0\cdot p_1(x) + 1\cdot p_2(x) + 0\cdot p_3(x)$$
$$T(p_2)(x) = x\,p_2(x) = x^3 = p_3(x) . = 0\cdot p_0(x) + 0\cdot p_1(x) + 0\cdot p_2(x) + 1\cdot p_3(x)$$

Därför är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisen för T i baserna $\{p_0, p_1, p_2\}$ och $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$

Vi går nu tillbaka till det allmänna fallet. Låt $T : E \to F$ vara den linjära operator, som vi betraktade i början av detta avsnitt och som har matrisen A i definition 10.1. Avsikten är att skriva likheten $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ i matrisform. Därför inför vi beteckningarna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = (\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,)^T \qquad \text{och} \qquad Y = (\,y_1 \quad \ldots \quad y_m\,)^T$$

för koordinatvektorerna för $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i respektive bas. Genom insättning av i tur och ordning (1)

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ bas i E, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ bas i F

Ex (23.5.06) För en linjär operator $T: E \to E$ gäller att

$$\begin{cases} T(a_1) = a_1 - a_2 \\ T(a_2) = a_2 - a_3 \\ T(a_3) = a_3 - a_1, \end{cases}$$

där $\{a_1, a_2, a_3\}$ är en bas i E. Vilken är matrisen för T i den nämnda basen? Finns det någon vektor $x \in E$ sådan att $T(x) = a_1$?

$$\begin{cases} T(a_1) = a_1 - a_2 + 0 \cdot a_3 \\ T(a_2) = 0 \cdot a_1 + a_2 - a_3 \\ T(a_3) = -a_1 + 0 \cdot a_2 + a_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen för T i basen $\{a_1\ a_2\ a_3\}$.

Ekv. $T(x) = a_1 \iff A\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ koordinaterna för x.

koordinaterna för a_1.

$$(A \mid \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{012}^{+}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{071}^{+}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inkonsistent!

$\therefore$ Det finns ingen vektor $x \in E$ sådan att $T(x) = a_1$.

Ex (26.2.03) Antag att en linjär operator $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Vilken är matrisen för T i basen $\{b_1, b_2, b_3\}$ då

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ b_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3 \end{cases} \quad ?$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrisen i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ b_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3 \end{cases} \Longrightarrow \quad \underline{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

"basbytesmatrisen"

$\underline{A' = C^{-1} A C}$, matrisen för T i basen $\{b_1, b_2, b_3\}$.

$$(C \mid I) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \underline{C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{A'}} = C^{-1} \cdot A \cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Ex) (22.5.07) Låt $\{a_1, a_2, a_3\}$ beteckna en bas i vektorrummet E och låt $T: E \to E$ vara en linjär operator sådan att T^{-1} existerar och

$$\begin{cases} 2T(a_1) - T(a_2) + 3T(a_3) = a_1 \\ -T(a_1) + 2T(a_3) = a_2 \\ 3T(a_1) + 2T(a_2) + T(a_3) = a_3 . \end{cases}$$

Bestäm matriserna för T och T^{-1} i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{cases} 2T(a_1) - T(a_2) + 3T(a_3) = a_1 \\ -T(a_1) + 2T(a_3) = a_2 \\ 3T(a_1) + 2T(a_2) - T(a_3) = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(2a_1 - a_2 + 3a_3) = a_1 \\ T(-a_1 + 2a_3) = a_2 \\ T(3a_1 + 2a_2 + a_3) = a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = T^{-1}(a_1) \\ -a_1 + 2a_3 = T^{-1}(a_2) \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = T^{-1}(a_3) \end{cases} \quad \therefore \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen för T^{-1}.

Matrisen A för T är: $A = B^{-1}$:

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{RO}} \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/21 & -1/3 & 2/21 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/21 & 1/3 & 1/21 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -7 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Matrisen för } T.$$