Ex| 14 a) Ant. $b_1, \dots, b_m$ linj. obero.
$b_{m+1} \notin \text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$

Undersöker $c_1 b_1 + \dots + c_m b_m + c_{m+1} b_{m+1} = 0$

$c_{m+1} \neq 0 \Rightarrow b_{m+1} = -\frac{c_1}{c_{m+1}} b_1 - \dots - \frac{c_m}{c_{m+1}} b_m \in \text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$
(Motsägelse) ↯

$\therefore \underline{c_{m+1} = 0}$.

Alltså: $c_1 b_1 + \dots + c_m b_m + c_{m+1} b_{m+1} = 0$

$\Rightarrow c_1 b_1 + \dots + c_m b_m = 0$

$\Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$ ($b_1, \dots, b_m$ linj. obero.)

$\therefore$ $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}$ linj. oberoende. $\square$

Ex| Visa att $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x - 1$, $P_3(x) = (x-2)(x-1)$ bildar en bas för vektorrummet P_2 av polynom av gradtal ≤ 2.

Då $\dim P_2 = 3$, ($1, x, x^2$ en bas), räcker det att visa att P_1, P_2, P_3 är linjärt oberoende. (Sats 4.10)

Undersöker: $c_1 \cdot P_1(x) + c_2 \cdot P_2(x) + c_3 \cdot P_3(x) = 0, \forall x$

$\Leftrightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 (x-1) + c_3 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0, \forall x$

$\Leftrightarrow (c_1 - c_2 + 2c_3) + (c_2 - 3c_3)x + c_3 x^2 = 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$$

$\therefore$ P_1, P_2, P_3 linj. obero., därmed en bas för P_2

Ex) Bestäm koordinaterna för $p(x) = 1 + x + x^2$ med avseende på basen $\{1, x-1, (x-2)(x-1)\}$ i P_2.

Bestämmer a_1, a_2, a_3 så ~~att~~

$$1 + x + x^2 = a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-2)(x-1), \forall x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x + x^2 = (a_1 - a_2 + 2a_3) + (a_2 - 3a_3)x + a_3 x^2, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 1 \\ a_2 - 3a_3 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \; 1 + x + x^2 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-2)(x-1)$$

(14.3.2006)

Ex Bestäm en bas i $R(A)$, $R(A^T)$ samt i $N(A)$ till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -11 & 18 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & -8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{BO3}]{\text{BO1}^+} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

1°) Bas i $R(A^T)$: $\{(2\ -3\ 6\ 1),\ (0\ 2\ -3\ -1)\}$

(Sats 4.11).

2°) Bas i $R(A)$: $\{(2\ 2\ 2)^T,\ (-3\ 1\ -11)^T\}$

(Sats 4.12)

Rangen av $A = \dim R(A) = \underline{\underline{2}}$ $\left(= \dim R(A^T)\right)$

3°) $$U \xrightarrow{\text{BO3}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^-} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO3}} \begin{array}{cccc} & & F & F \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3/4 \\ -3/2 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1/4 \\ -1/2 \\ 0 \end{matrix}\right) \\ & & s & t \end{array}$$

Sätter: $x_3 = s$, $x_4 = t$. Lösn. till $Ax = 0$ blir:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4}s + \frac{1}{4}t \\ x_2 = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \therefore \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{s}{4}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bas i $N(A)$: $\{(-3\ 6\ 4\ 0)^T,\ (1\ 2\ 0\ 4)^T\}$.

Defekten av $A = \dim N(A) = \underline{\underline{2}}$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ (9.3.2007). Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 3 & -7 & 11 \\ 6 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

har samma kolonnrum. $(R(A) = R(B))$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{BO1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \end{array} \end{array}$$

<u>Bas i $R(A)$</u>: $\{a_1, a_2\}$, $\dim R(A) = 2$.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boxed{b_1} & \boxed{b_2} & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 3 & -7 & 11 \\ 6 & -12 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \end{array} \end{array} \xrightarrow[\text{BO1}^+]{\text{BO2}} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \end{array} \end{array}$$

<u>Bas i $R(B)$</u>: $\{b_1, b_2\}$, $\dim R(B) = 2$.

$$C = (a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -7 \\ 3 & 6 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\{a_1, a_2\}$ <u>bas</u> i $\text{spn}\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = R(C)$

$\therefore$ b_1 och b_2 linjär kombinationer av a_1 och a_2.

$\therefore$ $R(B) \subseteq R(A)$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} R(B) \subseteq R(A) \\ \dim R(B) = 2 = \dim R(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\underline{R(A) = R(B)}}. \ \square$$

Ex (27.1.04) Bestäm baser i $R(A)$, $R(A^T)$, $N(A)$ och $N(A^T)$ till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -13 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOT}^+} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOT}^+} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bas i $R(A)$: $\{(2\ 4\ 2)^T, (-1\ 2\ 7)^T\}$

Bas i $R(A^T)$: $\{(2\ -1\ 3\ 0), (0\ 4\ -8\ 3)\}$

$$\xrightarrow{\text{BOS}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOT}^-} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1 & -2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOS}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & F & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 1 & -2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & s & t \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}s - \frac{3}{8}t \\ x_2 = 2s - \frac{3}{4}t \\ x_3 = 1\cdot s + 0\cdot t \\ x_4 = 0\cdot s + 1\cdot t \end{cases} \quad \therefore \quad x = \frac{s}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{8}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bas i $N(A)$: $\{(-1\ 4\ 2\ 0)^T, (-3\ -6\ 0\ 8)^T\}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -13 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{BOT}^+]{\text{BOS}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{BOT}^+]{\text{BOS}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOT}^-} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & s \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3s \\ x_2 = -2s \\ x_3 = s \end{cases} \quad \therefore \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bas i $N(A^T)$: $\{(3\ -2\ 1)^T\}$

(27.01.2004)

Ex Visa att för underrummen

$$U = \{(x\ y\ z)^T \mid x + 2y = z,\ y = z\}$$
$$V = \{(x\ y\ z)^T \mid 2x + 3y = z\}$$

av $\mathbb{R}^3$ gäller att $U \subset V$. Bestäm dessutom en bas $\{b_1, b_2\}$ i V sådan att $\{b_1\}$ är en bas i U.

1°) Bas i U: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BOT}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & s \end{array} \end{array}$

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \{\underbrace{(-1\ 1\ 1)^T}_{=b_1}\} \text{ bas}$$

2°) Bas i V: $(2\ \ 3\ \ -1) \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & F & F \end{array} \\ (1\ \ 3/2\ \ -1/2) \\ \begin{array}{ccc} & s & t \end{array} \end{array}$

$$\begin{cases} x_1 = -\tfrac{3}{2}s + \tfrac{1}{2}t \\ x_2 = 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ x_3 = 0 \cdot s + 1 \cdot t \end{cases}, \quad \{\underbrace{(-3\ 2\ 0)^T}_{=b_2}, \underbrace{(1\ 0\ 2)^T}_{=b_3}\}$$

3°) $$(b_1\ b_2\ b_3) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & s \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2s \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases}$$

Välj $s = 1$: $-2b_1 + b_2 + b_3 = 0$

$\therefore\ b_1 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \in \text{spn}\{b_2, b_3\} = V$

$\therefore\ U = \text{spn}\{b_1\} \subseteq \text{spn}\{b_2, b_3\} = V = \text{spn}\{b_1, b_2, b_3\}$

Schemat ovan visar att $\text{spn}\{b_1, b_2\} = \text{spn}\{b_1, b_2, b_3\} = V$

$\therefore\ \{b_1, b_2\}$ bas i V.

Ex (14.3.2006) Undersök om mängden V av alla matriser

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ a & c \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R},$$

bildar ett underrum av alla 2/2-matriser. Bestäm en bas i V om det är ett underrum.

$$\left.\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} \in V \\ Y &= \begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X+Y = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & (b_1+b_2) \\ a_1+a_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} \in V \\ \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda b_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda c_1 \end{pmatrix} \in V \end{cases}$$

för varje $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ V underrum av {2/2-matriser}.

Bas i V: Varje $X = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & c \end{pmatrix} \in V$ kan skrivas i formen

$$X = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3},$$

dvs. $V = \operatorname{span}\{M_1, M_2, M_3\}$.

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a+b = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

$\therefore$ M_1, M_2, M_3 linjärt oberoende.

$\therefore$ $\{M_1, M_2, M_3\}$ är en bas i V.

$\boxed{Ex}$ (27.1.04) Bestäm alla vänster inverser till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösen $\underset{}{\overset{2/3}{X}}\,\overset{3/2}{A} = \overset{2/2}{I}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

$XA = I \iff A^T X^T = I$

$$(A^T \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo1^+} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Bo3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo1^-} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \overset{F}{1} & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$\underline{x_3 = s}, \underline{y_3 = t}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} - s \\ x_2 = 2/3 - s \\ x_3 = s \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = 1/3 - t \\ y_2 = -1/3 - t \\ y_3 = t \end{cases}$$

$$\therefore \; \underline{\underline{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3s & 2-3s & 3s \\ 1-3t & -1-3t & 3t \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$