Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (a_1 \; a_2)$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

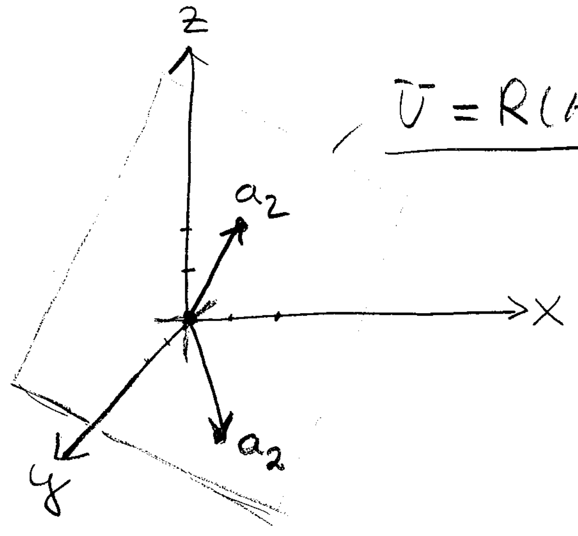
$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \underbrace{u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ Sats 2.1}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

linjärkombination av $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$U = \operatorname{spn}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

U underrum av $\mathbb{R}^3$.

$R(A) = \operatorname{spn}\{a_1, a_2\} = U$, kolonnrummet till A



$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$R(A)$ plan genom $(0,0,0)$ innehållande a_1, a_2.

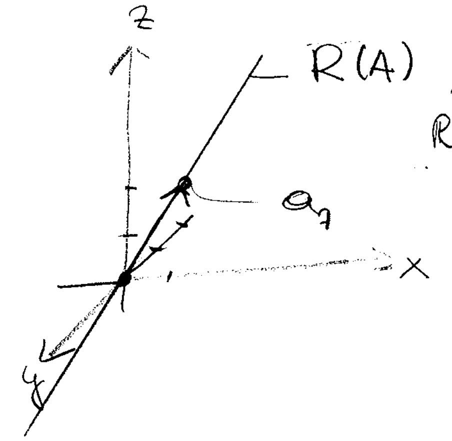
Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2)$

Ser att $\underline{a_2 = -1 \cdot a_1}$.

För $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gäller:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 = c_1 a_1 + c_2(-a_1) = (c_1 - c_2) a_1$$

<u>Alltså</u>: $\underline{R(A)} = \text{spn}\{a_1, a_2\} = \underline{\text{spn}\{a_1\}}$.



$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)^T : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

<u>R(A) linjen genom (0,0,0) och a_1</u>

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{RO1}^+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{(E)} \xrightarrow{\text{RO3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}_{(RE)}$, Sätt: $\begin{cases} x_2 = s \\ x_4 = t \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -s - \frac{7}{4}t \\ x_2 = s \\ x_3 = \frac{1}{4}t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad \underline{s,t \in \mathbb{R}}$$

<u>Lösningarna till $Ax = 0$</u>

$$\therefore \ \underline{x = s\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \frac{t}{4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_2}};$$

$$\underline{N(A) = \text{spn}\{v_1, v_2\} = \text{spn}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}}.$$

Ex) $\underline{A = (a_1 \dots a_n)}$, $\underline{m/n\text{-matris}}$

1°) $\underline{R(A)} = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\} = \{c_1 a_1 + \dots + c_n a_n : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$
<u>Kolonnrummet</u> till A, $\subseteq \mathbb{R}^m$, <u>underrum</u>.

$$\underbrace{A \cdot x}_{\substack{\in R(A) \\ \forall x}} = b \quad \underline{\text{konsistent}} \iff b \in R(A).$$

2°) $\underline{\underline{N(A)}} = \{x : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, <u>underrum</u>

$$\underline{Ax_0 = b} \implies \underline{\{x : Ax = b\} = x_0 + N(A)}.$$

Ex) (14.3.2006) Är vektorerna $(1\ {-1}\ 1\ 2)$, $(1\ 2\ 2\ 1)$, $(-1\ 0\ 1\ 2)$ linjärt beroende?

<u>Löser</u> $Ax = 0$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{BO1}^+]{\text{BO2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(2) \to (2) - (3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO1}^+} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\#(\text{fria var.}) = 0}$, <u>Vektorerna linj. oberoende</u>.

Ex) Visa att $\begin{cases} a_1 = (2 \ \ -2 \ \ 1)^T \\ a_2 = (1 \ \ 1 \ \ 1)^T \\ a_3 = (1 \ \ -7 \ \ -1)^T \end{cases}$ är linjärt beroende.

Sätt: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{BO2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \right)$

$\xrightarrow{BO1^+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{BO1^+} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (E)$

$\#$(fria var.) $= 1$, linjärt beroende.

$\xrightarrow{BO3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{BO1^-} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sätt: $c_3 = s$, $\begin{cases} c_1 = -2s \\ c_2 = 3s \\ c_3 = s \end{cases}$

Välj: $s = -1$, ger linjärkombinationen

$$2 \cdot a_1 - 3 \cdot a_2 - 1 \cdot a_3 = 0$$

$$\left(\begin{aligned} a_3 &= 2a_1 - 3a_2 \\ a_1 &= \frac{3}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_3 \\ a_2 &= \frac{2}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_3 \end{aligned} \right)$$

Ex) $E = \{2/2\text{-matriser}\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -6 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 - 3c_2 = 0 \\ 4c_1 - 6c_2 = 0 \quad |\cdot\frac{1}{2} \\ -6c_1 + 9c_2 = 0 \quad |\cdot -\frac{1}{3} \\ 10c_1 - 15c_2 = 0 \quad |\cdot\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2c_1 - 3\overset{F}{c_2} = 0$$

Sätt: $c_2 = 1$

$c_1 = \frac{3}{2}\cdot c_2 = \frac{3}{2}$.

$$\frac{3}{2}A + 1\cdot B = 0 \Leftrightarrow 3A + 2B = 0, \text{ linjärt beroende}.$$

Ex) $\mathcal{M} = \{f : D_f = [0,1]\}$

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = x\sin^2 x, \quad f_3(x) = \frac{x}{3}\cos^2 x$$

$$c_1 \frac{x}{2} + c_2 x \sin^2 x + c_3 \cdot \frac{x}{3}\cos^2 x = 0, \ \forall x$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{c_1}{2} + c_2 \sin^2 x + \frac{c_3}{3}\cos^2 x\right) = 0, \ \forall x$$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ Välj speciellt: $c_1 = 2, \ c_2 = -1, \ c_3 = -3$

$$\therefore \ x(\underbrace{1 - \sin^2 x - \cos^2 x}_{=0,\ \forall x \in [0,1]}) = 0, \ \forall x$$

$$\therefore \ 2f_1 - f_2(x) - 3f_3(x) = 0, \ \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ f_1, f_2, f_3 linjärt beroende.

(13.3.2007)

Ex) För vilka värden på a är vektorerna
$(-1\ 3\ 0)^T,\ (1\ 2\ a)^T,\ (a\ 1\ 2)^T$
linjärt beroende? För vilka värden på a bildar de en bas $\mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{BO1^+} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 1+3a & 5 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[BO3]{BO2} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a/2 \\ 0 & 1+3a & 5 \end{pmatrix}$$

(lösr: $Ax=0$)

$$\xrightarrow{BO1^+} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a/2 \\ 0 & 0 & \underbrace{5-\frac{a}{2}(1+3a)}_{\frac{10-a-3a^2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$a^2+\frac{1}{3}a-\frac{10}{3}=0 \iff a=\begin{cases} 5/3, \\ -2 \end{cases}$$

Vektorerna linj. beroende $\iff a \in \{\frac{5}{3}, -2\}$

Vektorerna bildar en bas i $\mathbb{R}^3 \iff a \notin \{\frac{5}{3}, -2\}$

(3 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$)

Ex) Visa att vektorerna $b_1=(1\ 2\ 1)^T,\ b_2=(0\ 2\ 2)^T,$
$b_3=(1\ -1\ 2)^T$
bildar en bas i $\mathbb{R}^3$ och bestäm koordinaterna för vektorn $a=(1\ 2\ 3)^T$ i denna bas.

GYH:
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & a \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{BO1^+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{BO1^+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)^{(E)}$$

(fria var.) = 0, linj. oberoende, bas i $\mathbb{R}^3$

$$\xrightarrow{BO3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{BO1^-} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)^{(RE)} \begin{matrix} =x_1 \\ =x_2 \\ =x_3 \end{matrix}$$

$$\therefore\ a=(1\ 2\ 3)^T=\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{4}b_2+\frac{1}{2}b_3.$$