Ex $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, x egenvektor

$\Rightarrow$ $A(cx) = cAx = c \cdot \lambda x = \lambda(cx)$

$\Rightarrow$ cx egenvektor, $c \neq 0$.

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Karakteristiska ekvationen: $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(2-\lambda)(-6-\lambda) - 3 \cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 21}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$

$\therefore$ $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -7$ egenvärden

Egenvektorer: Lösa homogena ekvationen $(A - \lambda I)x = 0$

1°) $\lambda = 3$: $A - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{B03, B01^t} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\therefore \begin{cases} x_1 = 3s \\ x_2 = s \end{cases}$

$\therefore$ $x = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$, egenvektorerna $\leftrightarrow \lambda = 3$

2°) $\lambda = -7$: $A - (-7) \cdot I = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B03, B01^t} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\therefore \begin{cases} x_1 = 1/3\, s \\ x_2 = s \end{cases}$

$\therefore$ $x = \frac{s}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, egenvekt. $\leftrightarrow \lambda = -7$

Egenrummen:

$$\begin{cases} V(3) = \text{spn}\{(3\ \ 1)^T\} \\ V(-7) = \text{spn}\{(-1\ \ 3)^T\} \end{cases}$$

Ex) $\underline{A \text{ singulär}}$ $\Leftrightarrow N(A) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow N(A - 0 \cdot I) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \exists\, x \neq 0 : (A - 0 \cdot I)x = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, x \neq 0 : Ax = 0 = 0 \cdot x$

$\Leftrightarrow \underline{0 \text{ egenvärde till } A}$.

Ex) $\underline{A \text{ reell}, \lambda \text{ reell}}$, $x = x_1 + i x_2$ egenvektor, x_1, x_2 reella

$$A(x_1 + i x_2) = \lambda (x_1 + i x_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{Ax_1}_{\text{reell}} + i \cdot \underbrace{Ax_2}_{\text{reell}} = \underbrace{\lambda x_1}_{\text{reell}} + i \cdot \underbrace{\lambda x_2}_{\text{reell}} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 = \lambda x_1 \\ Ax_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x_1, x_2 reella egenvektorer svarande mot λ, förutsatt att de är $\neq 0$, vilket åtminstone en av dem är.