Matriser II. 19.5.2015

1. Bestäm med hjälp av determinantteori för vilka värden på parametern a som matrisen

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

är inverterbar.

2. Låt a vara vektorn $(1 \;\; 2 \;\; 2)^T$ i $\mathbb{R}^3$. Bestäm alla speglingsmatriser S, för vilka $Sa = (2 \;\; 2 \;\; 1)^T$. (Ledning: Vi har två möjligheter, antingen spegling i ett plan genom origo eller spegling i en linje genom origo).

3. Bestäm minstakvadratlösningarna till inkonsistenta systemet $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Räkna även ut projektionen av b på kolonnrummet $R(A)$.

4. Bilda utgående från de linjärt oberoende vektorerna

$$a_1 = (1 \;\; 0 \;\; 1)^T, \; a_2 = (0 \;\; 1 \;\; 1)^T, \; a_3 = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$$

en ortonormal bas i $\mathbb{R}^3$ genom att använda Gram-Schmidt-proceduren.

5. Bestäm en ortogonal matris Q som diagonaliserar den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna med hjälp av diagonaliseringen matrisen A^6.

Matriser II. 19.5.2015. Lösningsförslag.

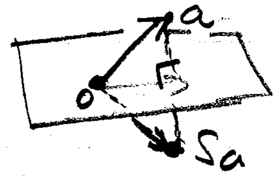
1.) Se hemuppgifter till vecka 15. $(a \notin \{0, \pm\sqrt{2}\})$

2.) $a = (1\ \ 2\ \ 2)^T$ i $\mathbb{R}^3$. Bestäm alla speglingsmatriser S för vilka $Sa = (2\ \ 2\ \ 1)^T$.

Betrakta två möjligheter:

1°) Spegling i planet genom origo med normalvektor n:

$$\underline{n} = a - Sa = (-1\ \ 0\ \ 1)^T$$



P = projektionsmatrisen på planet

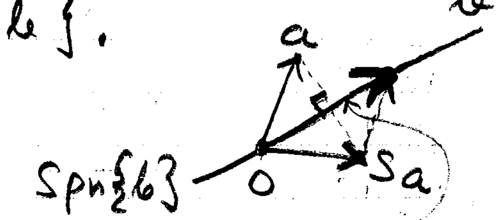
P' = —"— —"— $\operatorname{spn}\{n\}$ = planets ort. kompl.

$$\therefore\ \underline{S} = 2P - I = I - 2P' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\cdot\frac{n\, n^T}{\|n\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}(-1\ \ 0\ \ 1) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}}.$$

2°) Spegling i räta linjen $\operatorname{spn}\{a + Sa\} = \operatorname{spn}\{\underbrace{(3\ \ 4\ \ 3)^T}_{b}\}$

P = projektionsmatrisen på $\operatorname{spn}\{b\}$.



$b = a + Sa$

$$\underline{\underline{S}} = 2P - I = 2\cdot\frac{b\,b^T}{\|b\|^2} - I$$

$$= 2\cdot\frac{1}{34}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}(3\ \ 4\ \ 3) - I$$

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix}9&12&9\\12&16&12\\9&12&9\end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix}17&0&0\\0&17&0\\0&0&17\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-8&12&9\\12&-1&12\\9&12&-8\end{pmatrix}}}.$$

3.) $A = \begin{pmatrix}-1&2&1\\1&2&-1\\-1&6&1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $Ax = b$ inkonsistent system.

Bildar $A^TA\,x = A^Tb$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&-6&-3\\-6&44&6\\-3&6&3\end{pmatrix}\cdot x = \begin{pmatrix}-1\\10\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&-6&-3\\-6&44&6\end{pmatrix}\cdot x = \begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-6&-3&-1\\-6&44&6&10\end{array}\right) \xrightarrow{BO1} \left(\begin{array}{ccc|c}3&-6&-3&-1\\0&32&0&8\end{array}\right) \xrightarrow{BO3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1/3\\0&1&0&1/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{BO1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\ &\ &F\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1/6\\0&1&0&1/4\end{array}\right)\\ \begin{array}{ccc}\ &\ &S\end{array}\end{array}. \quad \therefore \begin{cases}x_1 = 1/6 + s\\ x_2 = 1/4\\ x_3 = \quad s\end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$

Minstakvadratlösningarna:

$$\underline{\underline{x = \overbrace{\begin{pmatrix}1/6\\1/4\\0\end{pmatrix}}^{x_0} + s\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}^{N(A)},\quad s \in \mathbb{R}.}}$$

Projektionen av b på $R(A)$ ges av:

$$\underline{\underline{p}} = Ax = Ax_0 = \begin{pmatrix}-1&2&1\\1&2&-1\\-1&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/6\\1/4\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}}.$$

4.) $a_1 = (1\ \ 0\ \ 1)^T$, $a_2 = (0\ \ 1\ \ 1)^T$, $a_3 = (1\ \ 1\ \ 1)^T$.

Sätt: $v_1 = a_1$, $v_2 = a_2 - \lambda\cdot v_1$.

Krav: $0 = v_1^Tv_2 = v_1^Ta_2 - \lambda\cdot\underbrace{\|v_1\|^2}_{2}$ $\therefore$ $\underline{\lambda = 1/2}$.

$$\therefore\ \underline{v_2} = (0\ \ 1\ \ 1)^T - \frac{1}{2}(1\ \ 0\ \ 1)^T = \underline{\underline{\frac{1}{2}(-1\ \ 2\ \ 1)^T}}.$$

forts. vänd!

4.| (Forts.)

Sätt: $v_3 = a_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$.

Krav:
$$\begin{cases} 0 = v_1^T v_3 = \overbrace{v_1^T a_3}^{2} - \lambda_1 \overbrace{\|v_1\|^2}^{2} \\ 0 = v_2^T v_3 = \underbrace{v_2^T a_3}_{1} - \lambda_2 \cdot \underbrace{\|v_2\|^2}_{3/2} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2/3 . \end{cases}$$

$$\therefore\ v_3 = (1\ 1\ 1)^T - (1\ 0\ 1)^T - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(-1\ 2\ 1)^T = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Sätt: $q_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$, $i = 1,2,3$;

$$\begin{cases} q_1 = \tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ q_2 = \tfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ q_3 = \tfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \\ \text{ON-bas i } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

5.|
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska ekvationen:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)\to(1)+(3) \\ (2)\to(2)+(4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 4-\lambda \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{BO}} = (3-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{BO}}$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda)(1+\lambda)\cdot\lambda$$

(forts. vänd!)

5.| (forts.)

$\therefore\ \lambda = -1,\ 0,\ 3,\ 4$ egenvärden.

1°) $\lambda = -1$:
$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO}} \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
s

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
$\therefore$ Sätt $a_1 = (-1\ 0\ 1\ 0)^T$.
Då är $q_1 = \frac{1}{\sqrt2}(-1\ 0\ 1\ 0)^T$ egenvektor

2°) $\lambda = 0$:
$$A + 0\cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO}} \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
s

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = s \end{cases}$$
$\therefore$ Sätt $a_2 = (0\ -1\ 0\ 1)^T$
Då är $q_2 = \frac{1}{\sqrt2}(0\ -1\ 0\ 1)^T$ egenvektor

3°) $\lambda = 3$:
$$A - 3\cdot I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO}} \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
s

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
$\therefore$ Sätt $a_3 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$
Då är $q_3 = \frac{1}{\sqrt2}(1\ 0\ 1\ 0)^T$ egenvektor

4°) $\lambda = 4$:
$$A - 4\cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{BO}} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
s

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = s \end{cases}$$
$\therefore$ Sätt $a_4 = (0\ 1\ 0\ 1)^T$
Då är $q_4 = \frac{1}{\sqrt2}(0\ 1\ 0\ 1)^T$ egenvektor.

(forts. vänd!)

5.) (forts)

Matrisen: $\underline{\underline{Q}} = (q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

är ortogonal och diagonaliserar A:

$$\underline{Q^T A Q} = Q^{-1} A Q = D = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = Q D Q^T \quad \text{och} \quad A^n = Q D^n Q^T, \; n = 1, 2, \ldots$$

Då är:

$$\underline{\underline{A^6}} = Q \cdot D^6 \cdot Q^T = \ldots = \begin{pmatrix} 365 & 0 & 364 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 & 2048 \\ 364 & 0 & 365 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 & 2048 \end{pmatrix}.$$