Matriser I. 3.3.2015

1. Beräkna inversen A^{-1} till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. För vilka värden på parametrarna a och b är matriserna
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ och } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
linjärt beroende i vektorrummet av alla 2/2-matriser?

3. Bestäm en permutationsmatris P sådan att PA har en LU-faktorisering och beräkna denna, då
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Utnyttja sedan LU-faktorseringen av PA för att bestämma lösningarna till ekvationen $Ax = b$, där $b = (7 \;\; 17 \;\; 16)^T$.

4. Bestäm en bas i $R(A)$, $R(A^T)$ och $N(A^T)$, (dvs. i kolonnrummet, radrummet och vänsternollrummet), till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Vilken dimension har nollrummet $N(A)$?

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär operator som har matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
med avseende på basen $\{a_1 = (1 \;\; 0 \;\; 0)^T,\; a_2 = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T,\; a_3 = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T\}$ i $\mathbb{R}^3$. Bestäm alla vektorer x som löser ekvationen
$$T(x) = (1 \;\; 2 \;\; 3)^T - x,$$
genom att övergå till en matrisekvation med koordinatvektorer.

Matriser I. 3.3.2015, Lösningsförslag

1. Se uppgift 3, hemuppgifter till vecka 6.

2. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

För vilka a, b linjärt beroende i vektorrummet av alla 2/2-matriser?

Söker icke-triviala lösningar c_1, c_2, c_3 till:

$$c_1 \cdot M_1 + c_2 \cdot M_2 + c_3 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ a \cdot c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + b \cdot c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Ont}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & b-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Ont}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{a}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{b-3}{5} \end{pmatrix}$$

För att c_3 skall vara fri variabel krävs att:

$$1 - \frac{a}{5} = 0 \quad \text{och} \quad -\frac{b-3}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 5 \quad \text{och} \quad b = 3.$$

Svar: Linjärt beroende om $\begin{cases} a = 5, \\ b = 3. \end{cases}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo1}^+} \begin{matrix} \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo2}} \begin{matrix} \\ (3) \\ (2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3) \\ (2) \end{matrix}$

$\therefore \begin{cases} P = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad \therefore \; PA = LU.$

Löser $Ax = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix} = b$:

$$Ax = b \iff PAx = Pb = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$
$$\iff LUx = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

1°) Sätter $y = Ux$. Löser $Ly = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 16 \\ 2 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Bo1}^+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \therefore \; y = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2°) Löser $Ux = y$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Bo3}^-} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Bo1}^-,\ \text{Bo3}]{\text{Bo3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $Ax = b$ har entydig lösning $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo1}^+} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} \text{Bas i } R(A^T): \{(2 \; 1 \; 3 \; 1)^T, (0 \; 0 \; -5 \; -1)^T\} \\ \text{Bas i } R(A): \{(2 \; 4 \; 6)^T, (3 \; 6 \; 4)^T\} \end{cases}$

Bas i $N(A^T)$ fås genom att lösa $A^T x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo1}^+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bo1}^+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_2 \text{ fri variabel} \\ x_2 = s \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x_1 = -2s \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad x = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Bas i $N(A^T)$: $\{(-2 \; 1 \; 0)^T\}$

$\dim R(A) + \dim N(A) = n =$ antalet kolonner i A.

$\therefore \dim N(A) = 4 - \dim R(A) = 4 - 2 = 2.$

5. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

med avseende på basen $\begin{cases} a_1 = (1\ 0\ 0)^T, \\ a_2 = (1\ 1\ 0)^T, \\ a_3 = (1\ 1\ 1)^T \end{cases}$ i $\mathbb{R}^3$.

Lös ekvationen $T(x) = (1\ 2\ 3)^T - x$.

1°) Koordinaterna för $(1\ 2\ 3)^T$ i basen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo1^-} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo1^-} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ (1\ 2\ 3)^T = (-1)\cdot a_1 - 1\cdot a_2 + 3a_3.$$

2°) Sätt X till koordinatvektorn för x.

$$T(x) = (1\ 2\ 3)^T - x \iff AX = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - I\cdot X$$

$$\iff (A + I)\cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo3^+} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo1^+} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Bo1^-]{Bo3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo2^-} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{Bo3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ X = (-1/2\ \ -6\ \ 9)^T.$$

Svar: $x = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-6-1/2 \\ 9-6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$= (5/2\ \ 3\ \ 9)^T.$$