Matriser II. 20.5.2008

1. Räkna ut determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Bestäm projektionen av **a** på **b** och av **b** på **a** då
$$\mathbf{a} = (2 \quad 0 \quad 2)^T \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b} = (0 \quad 3 \quad 3)^T.$$
Bestäm vinkeln mellan **a** och **b**.

3. Ortonormera vektorerna
$$\mathbf{a}_1 = (2 \quad 2 \quad 0)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (4 \quad 2 \quad 1)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (2 \quad 0 \quad 4)^T$$
med hjälp av Gram-Schmidt-proceduren till ett ortonormalt system.

4. Diagonalisera matrisen
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 17 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
med hjälp av en ortogonal matris (som bör anges!).

5. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ och $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ vara linjära operatorer sådana att
$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1 \quad 2 \quad 3)^T, & (S \circ T)(\mathbf{e}_1) &= (1 \quad 1)^T \\ T(\mathbf{e}_2) &= (3 \quad 2 \quad 1)^T, & (S \circ T)(\mathbf{e}_2) &= (0 \quad 2)^T \end{aligned}$$
och $S(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (1 \quad 1)^T$ (där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är den naturliga basen i $\mathbf{R}^2$). Bestäm matrisen för S i de naturliga baserna i $\mathbf{R}^3$ och $\mathbf{R}^2$.

Matriser II. 22.5.2007

1. För vilka värden på t är vektorerna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ortogonala?

2. Bestäm projektionsmatrisen på planet

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \qquad \text{i } \mathbf{R}^3 .$$

Räkna också ut speglingsmatrisen i detta plan.

3. Vilken är minstakvadratlösningen till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också projektionen av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet $R(A)$.

4. Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av en ortogonal matris (som bör anges!).

5. Låt $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ beteckna en bas i vektorrummet E och låt $T : E \to E$ vara en linjär operator sådan att T^{-1} existerar och

$$\begin{aligned} 2T(\mathbf{a}_1) - T(\mathbf{a}_2) + 3T(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{a}_1 \\ -T(\mathbf{a}_1) \qquad\qquad + 2T(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{a}_2 \\ 3T(\mathbf{a}_1) + 2T(\mathbf{a}_2) + T(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{a}_3 . \end{aligned}$$

Bestäm matriserna för T och T^{-1} i basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

Matriser II. 23.5.2006

1. Räkna ut determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Bestäm projektionsmatrisen på planet V i $\mathbf{R}^3$ med ekvationen
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
samt projektionen av $\mathbf{b} = (\,1 \quad -2 \quad 1\,)^T$ på V.

3. Ortonormera vektorerna
$$\mathbf{a}_1 = (\,0 \quad 2 \quad -2\,)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (\,1 \quad 4 \quad -2\,)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (\,-1 \quad 3 \quad 1\,)^T$$
med hjälp av Gram-Schmidt-proceduren.

4. För en linjär operator $T : E \to E$ gäller att
$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}_1) &= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \\ T(\mathbf{a}_2) &= \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \\ T(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 , \end{aligned}$$
där $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ en en bas i E. Vilken är matrisen för T i den nämnda basen? Finns det någon vektor x i E sådan att $T(x) = \mathbf{a}_1$?

5. Diagonalisera den symmetriska matrisen
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
med hjälp av en ortogonal matris Q. Ange den matris Q, som du använder.

Matriser II. 26.2.2004

1. Räkna ut determinanten
$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Vektorn $\mathbf{y} = (\, y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \,)^T$ i $\mathbf{R}^4$ speglas i underrummet av alla lösningar till ekvationen
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,.$$
Räkna ut komponenterna för speglingsvektorn till $\mathbf{y}$.

3. Bestäm den lösning till systemet
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 134 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 18 \end{cases}$$
som finns i koefficientmatrisens radrum.

4. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$
med hjälp av en ortogonal matris Q samt räkna ut en formel för A^n. Visa dessutom att Q kan väljas att vara en speglingsmatris.

5. En linjär operator $T : E \to E$ är i basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ definierad genom
$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}_1) &= \mathbf{a}_1 \\ T(\mathbf{a}_2) &= 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ T(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3\,. \end{aligned}$$
Basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ är relaterad till en annan bas $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genom
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \phantom{\mathbf{b}_1 + {}} \mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{b}_1 \phantom{{} + 2\mathbf{b}_2} + \mathbf{b}_3\,. \end{aligned}$$
Vilken är matrisen för T i basen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$?

Matriser II. 26.2.2003

1. Räkna ut determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Bestäm projektionsmatrisen (för ortogonal projektion) på U samt speglingsmatrisen i U, då U är det underrum av $\mathbf{R}^4$ som har ekvationen
$$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\,.$$

3. Vilken är minstakvadratmetodslösningen till den inkonsistenta ekvationen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\,?$$

4. Antag att en linjär operator $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
i basen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Vilken är matrisen för T i basen $\{b_1, b_2, b_3\}$, då
$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ b_2 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b_3 &= 2a_1 + a_2 + 2a_3\,. \end{aligned}$$

5. Diagonalisera matrisen
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
med hjälp av en inverterbar matris. Räkna ut en formel för A^n. Vad händer med A^n då $n \to \infty$?