Matriser I. 13.3.2007

1. För vilka värden på a är vektorerna

$$(-1 \quad 3 \quad 0)^T, \quad (1 \quad 2 \quad a)^T, \quad (a \quad 1 \quad 2)^T$$

linjärt beroende? För vilka värden på a bildar de en bas i $\mathbf{R}^3$?

2. LDU-faktorisera den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Invertera matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm baser i radrummet, kolonnrummet, nollrummet och vänsternollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & 17 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 8 \\ -4 & 3 & 7 & -6 \\ 10 & -6 & -10 & 18 \end{pmatrix}$$

har samma kolonnrum.

Matriser I. 14.3.2006

1. LU-faktorisera matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Undersök om vektorerna
$$(1 \quad -1 \quad 1 \quad 2), \quad (1 \quad 2 \quad 2 \quad 1), \quad (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2)$$
är linjärt beroende eller oberoende.

3. Invertera matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm en bas i kolonnrummet, radrummet samt i nollrummet till matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -11 & 18 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Undersök om mängden V av alla matriser av formen
$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ a & c \end{pmatrix}, \qquad \text{där } a, b, c \in \mathbf{R},$$
bildar ett underrum av vektorrummet av alla 2/2-matriser. Bestäm en bas i V om det är ett underrum.

Matriser I. 27.1.2004

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$
för varje värde på parametern a.

2. Visa att vektorerna
$$(2 \quad -2 \quad 1 \quad 1)^T, (1 \quad 1 \quad 1 \quad 3)^T, (-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T, (2 \quad 1 \quad 1 \quad 4)^T$$
är linjärt beroende samt skriv en av dem som en linjärkombination av de andra.

3. Räkna ut alla vänsterinverser till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm baser i kolonnrummet, radrummet, nollrummet och vänsternollrummet till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -13 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Visa, att för underrummen
$$U = \{(x \ \ y \ \ z)^T \mid x + 2y = z,\ y = z\}$$
$$V = \{(x \ \ y \ \ z)^T \mid 2x + 3y = z\}$$
av $\mathbf{R}^4$ gäller att $U \subset V$. Bestäm dessutom en bas $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ i V sådan att $\{\mathbf{b}_1\}$ är en bas i U.

Matriser I. 28.1.2003

1. Invertera matrisen
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Lös matrisekvationen
$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a+1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
för varje reellt värde på parametern a.

3. Finn en permutationsmatris P, sådan att PA kan LU-faktoriseras, samt bestäm denna faktorisering, då
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm en bas i kolonnrummet, radrummet, nollrummet och i vänsternollrummet till matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Visa att matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
har samma kolonnrum.

Matriser I. 9.3.2001

1. Vilket villkor bör a, b och c uppfylla för att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= a \\ x + 2y + 2z &= b \\ x - 4y - 4z &= c \end{aligned}$$

skall vara konsistent?

2. Finn en permutationsmatris P sådan att PA kan LU-faktoriseras samt bestäm matriserna L och U (för detta P), då

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm baser i kolonnrummet, radrummet, nollrummet och vänsternollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -9 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. För vilka värden på a har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

en vänsterinvers? Bestäm alla vänsterinverser då sådana finns.

5. Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 3 & -7 & 11 \\ 6 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

har samma kolonnrum (dvs. visa att $R(A) = R(B)$).