Linjär Algebra, Hemuppgifter 9

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 9.4.2014.
Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Antag att $T \in L(V)$. Visa att T är inverterbar om och endast om 0 inte är ett singulärt värde till T.

2. Antag att $T \in L(V)$. Låt α och β beteckna det minsta respektive det största singulära värdet till T. Visa att

$$\alpha||v|| \leq ||Tv|| \leq \beta||v||$$

för all $v \in V$.

3. Låt $T, S \in L(V)$. Låt t beteckna det största singulära värdet till T, låt s beteckna det största singulära värdet till S och låt r beteckna det största singulära värdet till $T + S$. Visa att $r \leq t + s$.

4. Antag att $T \in L(V)$ har singulärvärdesuppdelningen

$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + ... + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$$

för varje $v \in V$, där $s_1, ..., s_n$ är de singulära värdena till T och $e_1, .., e_n$ samt $f_1, ..., f_n$ är ortonormerade baser i V. Visa att om T är inverterbar, så gäller

$$T^{-1}v = {s_1}^{-1}\langle v, e_1\rangle f_1 + ... + {s_n}^{-1}\langle v, e_n\rangle f_n$$

för varje $v \in V$.

5. Antag att $T \in L(V)$ är nilpotent. Visa att 0 är det enda egenvärdet till T.

6. Låt $C^\infty(I, \mathbb{R})$ beteckna rummet av alla funktioner från intervallet $I \subset \mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Betrakta den linjära operatorn $T : C^\infty(I, \mathbb{R}) \to C^\infty(I, \mathbb{R})$ definierad genom $T(f) = f''$. Bestäm de reella egenvärdena till T.