Kombinatorik ht. 2011

Kombinatorik: snabbgenomgång av teorin kap. 1-3

1 Inledning

Problem: Antag att k identiska golfbollar skall färgas med någon av n givna färger. Hur många olika färgläggningar finns det?

Om x_1 betecknar antalet bollar som målas i den första färgen, ..., x_n antalet som målas i den n-te färgen, ser vi att det sökta antalet är lika med antalet lösningar i ickenegativa heltal till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = k.$$

Beteckna detta tal med $f(n,k)$.

Några specialfall:

(1.1) $$f(1,k) = 1, \quad k \geq 1$$

(1.2) $$f(n,1) = n, \quad n \geq 1$$

$$f(2,2) = 3, f(2,3) = 4, f(2,k) = k+1, \quad k = 4,5,\ldots$$

Som en introduktion till kombinatorisk metodik presenteras nedan tre olika metoder att bestämma talen $f(n,k)$.

Första metoden: rekursion

Det visar sig att funktionen f (av de två variablerna n och k, $n,k \geq 1$) uppfyller *rekursionsformeln*

(1.3) $$f(n,k) = f(n-1,k) + f(n,k-1), \quad n,k \geq 2$$

vilket tillsammans med *randvillkoren* (1.1) och (1.2) ovan räcker för att bestämma f, dvs. för godtyckligt n och k kan $f(n,k)$ beräknas genom upprepad användning av (1.1), (1.2) och (1.3).

Linjära rekursioner eller *linjära differensekvationer* av en variabel behandlas i Bjon m.fl.: *Numerisk och diskret matematik*, Sigma vid Åbo Akademi 1989, kap. 5.

Exempel på rekursioner:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \;\; n \geq 3, \qquad a_1 = a_2 = 1$$

ger den välkända följden, jfr. Åbo energiverks skorsten, först beskriven av **Fibonacci** 1202.

Om

$$a_n = na_{n-1}, \;\; n \geq 2, \qquad a_1 = 1$$

så är $a_n = n!$.

Andra metoden: generande funktion

Betrakta n-te potensen av uttrycket $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$.

$$(1.4) \qquad (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdots (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

där antalet faktorer (= antalet parenteser) är n. Om vi utför multiplikationerna blir resultatet en heltalig linjär kombination av potenser av x. ($x^0 = 1$.) Exempelvis fås x^2 som produkten av ett x från första och andra faktorerna med ettor från de övriga faktorerna.

Vad blir koefficienten för x^k? Mao. hur många gånger uppträder produkter av formen

$$x^{t_1} x^{t_2} \cdots x^{t_n}$$

där vi valt termen x^{t_1} ur den första parentesen, termen x^{t_2} ur den andra, ... , x^{t_n} ur den n-te och där $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = k$?

Vi ser att koefficienten för x^k blir precis $f(n,k)$:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = f(n,0) + f(n,1)x + f(n,2)x^2 + f(n,3)x^3 + \ldots + f(n,k)x^k + \ldots$$

Eftersom

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

(åtminstone för tillräckligt små x) inses att

$$(1.5) \qquad (1-x)^{-n} = f(n,0) + f(n,1)x + f(n,2)x^2 + f(n,3)x^3 + \ldots + f(n,k)x^k + \ldots.$$

Vi säger att $(1-x)^{-n}$ är *genererande funktion* för talföljden $f(n,k), \;\; k = 1, 2, \ldots$.

Enligt en följdsats till *binomialteoremet* (se kapitel 2) är

$$(1-x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

vilket betyder att vi måste ha

$$f(n,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \tag{1.6}$$

Tredje metoden: kombinationer

Vi tänker oss att vi har $n = 5$ färger och $k = 7$ bollar. Vi kan uppgöra ett "protokoll" över färgläggningen t. ex. på följande sätt: Vi skriver ett kryss $\times$ för varje boll som färgas med första färgen, sedan en nolla 0 som markerar *byte* av färg, sedan ett kryss igen för varje boll som målats med färg nr 2 osv. Beteckningen

$$\times \times 0 \times \times \times 00 \times 0 \times$$

innebär således att 2 bollar målats i färg 1, 3 i färg 2, ingen i färg 3, 1 i färg 4 och 1 i färg 5.

En följd med $n-1$ nollor och k kryss svarar omvändbart entydigt mot färgläggning av k bollar med n färger. $f(n,k)$ är tydligen antalet möjliga sådana följder.

En följd karakteriseras av *var* kryssen placeras. Vi bör alltså bestämma på hur många sätt de k kryssen kan placeras ut på de $n+k-1$ tillgängliga platserna.

En r-elementig delmängd av en mängd med m element kallas en *kombination* av r ur (= utvalda bland) m. En av kombinatorikens mest grundläggande frågor är just denna: Hur många sådana kombinationer finns det, dvs. på hur många sätt kan man välja ut exakt r element i en m-elementig mängd? Standardbeteckningen för detta antal är

$$\binom{m}{r},$$

binomialkoefficienten "m över r".

Med denna beteckning blir

$$f(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

2 Urval och binomialkoefficienter

2.1 Permutationer

En uppräkning av elementen i en mängd M i en viss ordning kallas en *permutation* av mängden. Alternativt kan vi definiera permutation som en *bijektion* från M till M. En permutation av en n-elementig mängd kallas ofta permutation av n element, tecken, objekt etc. (utan närmare specificering av mängden).

Om *antalet* permutationer av n element betecknas med $p(n)$ så gäller $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 6$ och allmänt (*multiplikationsprincipen*) $p(n) = np(n-1)$, dvs.

$$p(n) = n!. \tag{2.1}$$

Exempel. Antag att en tidning vill presentera de tio lagen i Tipsligan (i fotboll) under tio på varandra följande dagar. Ordningsföljden kan då väljas på 10! olika sätt.

Hur många sätt blir det om det krävs att de två åbolagen TPS och Inter presenteras efter varandra? $(2 \cdot 9!)$ Om det krävs att de två åbolagen presenteras först och de tre österbottniska lagen under tre på varandra följande dagar? $(2 \cdot 6 \cdot 6!)$

2.2 Urval där ordningsföljden beaktas

En generalisering av ovannämnda problem är följande: På hur många sätt kan vi räkna upp r element utvalda bland n?

Beteckna detta antal med $p(n, r)$. Det första elementet i uppräkningen kan väljas på n sätt och då detta är valt de övriga $r-1$ på $p(n-1, r-1)$ sätt. En tillämpning av multiplikationsprincipen igen ger vid handen att

$$p(n, r) = np(n-1, r-1)$$

med randvillkoret $p(s, 1) = s$ för alla s. Rekursionen har lösningen

$$p(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{2.2}$$

Ibland är vi intresserade av uppräkningar av element som kan *upprepas*, s. k. *dragning med återläggning.*

Exempel. Jag köper varje dag en morgontidning. Antag att jag kan välja mellan fyra olika tidningar. Under en arbetsvecka (måndag - fredag) kan jag skaffa mig

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

olika uppsättningar tidningar.

Antalet uppräkningar av k element utvalda bland n så att upprepningar är tillåtna är givetvis

$$n^k.$$

2.3 Urval utan avseende på ordningsföljden

Att välja ut r element bland n utan avseende på ordningsföljden betyder helt enkelt att specificera en r-elementig delmängd av en mängd med n element. Beteckna antalet av sådana *kombinationer* av r ur n (se kapitel 1) med $c(n, r)$ eller

$$\binom{n}{r}.$$

Eftersom totala antalet ordnade uppräkningar av r element utvalda bland n är $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ får vi

$$r!c(n,r) = r!\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

dvs.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{2.3}$$

Exempel. Talen $f(n,k) = c(n+k-1, n-1)$, jfr. kapitel 1.

Teorem 2.1. *Om vi inför konventionen $c(n,0) = 1$ för alla n, så gäller*

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad 0 \le r \le n.$$

Teorem 2.2. *Låt n vara ett positivt heltal. Om vi utvecklar uttrycket $(1+x)^n$ efter potenser av x så har x^r koefficienten $\binom{n}{r}$.*

Teorem 2.3.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad 1 \le r \le n-1.$$

Talen $\binom{n}{r}$, $0 \le r \le n, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (där vi tilldelar $\binom{0}{0}$ värdet 1) brukar organiseras i ett triangulärt schema, *Pascals triangel* (**Blaise Pascal** (1625-1662)). Talen kallas vanligen *binomialkoefficienter* pga. följande faktum.

Teorem 2.4. **(Binomialteoremet)** *För godtyckliga reella tal a och b gäller*

$$\forall n > 0 : (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

Binomialkoefficienterna *genererande funktion* (se kapitel 1) är $(1+x)^n$. Nästa resultat följer omedelbart av binomialteoremet.

Teorem 2.5.

$$\forall n > 0 : (1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r x^r.$$

I analysen visas att följande gäller för små x och *godtyckligt* m

$$(1+x)^m =$$

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!}x^r + \ldots. \tag{2.4}$$

Då m är ett positivt heltal är serien ändlig, men om m är ett negativt heltal eller ickeheltaligt får vi en (för små x konvergent) oändlig serie. Speciellt har vi

Teorem 2.6. *För positiva heltal n gäller*

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r.$$

Detta resultat visades i kapitel 1 där vi konstaterade att genererande funktion för $f(n,r)$ är $(1-x)^{-n}$

$f(n,r)$ är ju antalet lösningar i ickenegativa heltal till

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r.$$

Det är samtidigt antalet sätt att dra r element ur n *med återläggning.* Låt nämligen x_1 vara antalet gånger vi drar element 1, x_2 antalet gånger vi drar element 2 osv. Totalantalet element som vi drar är r.

Vi kan sammanfatta de kombinatoriska resultaten i kapitel 2 som följer

Antalet sätt att välja k element bland n

-utan återläggning men med hänsyn till ordningsföljden:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

-utan återläggning och utan hänsyn till ordningsföljden:

$$\binom{n}{k}$$

-med återläggning och med hänsyn till ordningsföljden:

$$n^k$$

-med återläggning men utan hänsyn till ordningsföljden:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

3 Tilldelningsproblem

3.1 Parbildning och partitionering inom en mängd

Antag att vi har en mängd med $2n$ element. På hur många olika sätt kan vi dela upp den i n par? Till skillnad från situationen i nästa avsnitt betraktas alla element i mängden som identiska. Om vi exempelvis skall dela in en klass på 20 elever i par utan begränsningar följer vi teorin i detta avsnitt men om det skall ske så att paren består av en gosse och en flicka behövs teorin i avsnitt 3.2.

Antalet par i en mängd med $2n$ element visar sig vara

$$\frac{(2n)!}{2^n n!.} \tag{3.1}$$

Teorem 3.1. *Låt mängden S bestå av mn element. Då kan vi sönderdela mängden S i n stycker m-elementiga delmängder på*

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$$

olika sätt.

Exempel. En telefonförsäljningsfirma fördelar 20 kunder på sina 5 försäljare så att var och en får 4 kunder på sin lott. På hur många olika sätt kan det göras? ($\frac{20!}{(4!)^5}$)

I praktiken finns det dock en hel mängd restriktioner som komplicerar parbildning och partitionering. I exemplet ovan vet man kanske att vissa kunder inte kan betjänas av försäljare A medan andra kunder speciellt önskar betjäning av försäljare C eller D. Om en klass skall delas upp i par för ett visst grupparbete vet kanske läraren att eleverna A och B absolut inte kan paras ihop eller att C måste jobba med antingen D, E eller F.

Exempel. I figuren nedan representerar de sex punkterna personerna A - F. En linje mellan två punkter (personer) anger att de kan samarbeta. Finns det något sätt att bilda tre par med beaktande av samarbetsmönstret? (Nej)

Ett diagram av denna typ kallas en *graf* . En graf består alltså av punkter, *noder* eller *hörn*, sammanbundna av linjer, *länkar, kanter* . Dessa kan också vara *riktade.* I så fall talar man om en *riktad graf.* Vi kommer i kursen att bara stöta på sådana grafer där varje par av noder sammanbinds av högst 1 länk.

En graf där det finns länkar mellan varje par av noder kallas *fullständig.* I exemplet ovan skulle fullständighet innebära att samtliga personer kan samarbeta.

Orsaken till det negativa svaret i exemplet står att söka i bristen på länkar. Antalet länkar som utgår från en nod kallas nodens *grad.* I en fullständig graf med n noder är samtliga av graden $n-1$.

Teorem 3.2. *Antag att en graf har* $2n$ *noder. Om alla noderna är av grad* $\geq n$ *så kan de indelas i* n *par ("perfect matching").*

Bevis: (Induktion över r) 1 par kan alltid bildas eftersom det finns åtminstone 1 länk.

Antag nu att $r < n$ par bildats. Vi måste visa att vi kan bilda $r+1$ par. Om det finns en länk mellan något par av de $2(n-r)$ noder som ännu inte parats ihop väljer detta par som vårt par nr $r+1$. Om det *inte* finns något sådant par är vi tvungna att justera bland de r hittills utvalda paren.

Låt a och b vara godtyckligt valda noder bland dem som vi ännu inte parat ihop. Vi skall visa att det finns ett par u och v bland de r paren sådant att det går en länk mellan u och a och en mellan b och v. Vi ersätter då paret (u, v) med (u, a) och lägger till paret (b, v) till listan på par. Antalet funna par är nu $r+1$.

Är detta möjligt? Antag att det inte är det. Från a (b) utgår minst n länkar, av vilka ingen till någon av de oparade noderna. Betrakta ett par (x, y) bland de r utvalda paren. Av de möjliga länkarna xa, xb, ya, yb mellan x och y å ena sidan och a och b å den andra kan högst två finnas i grafen. Totalantalet länkar till a och b blir då högst $2r$ av vilket det följer att åtminstone den ena har grad $\leq r < n$, en motsägelse.

Anm. Villkoret i teoremet är tillräckligt men inte nödvändigt! (Varför?)

3.2 Tilldelning mellan två mängder. Giftermålsproblemet

I detta avsnitt behandlas tilldelningsproblem mellan två olika mängder. Vi kan t. ex. tänka på en mängd P av arbetssökande personer och en mängd J av jobb och frågan är på hur många sätt de arbetssökande kan tilldelas var sitt jobb. Speciellt intressant blir problemet om t. ex. kvalifikationerna för jobben är olika. (Grundfrågan då är om det finns något sätt överhuvudtaget.) En matematiskt ekvivalent problemställning är uppgiften att tilldela en mängd G gossar var sin flicka ur mängden F att gifta sig med.

Exempel. Fem jobb är tillgängliga. Sju sökande A - G har sökt platserna. För jobb 1 är A, B, C och G kvalificerade; sätt $S_1 = \{A, B, C, G\}$. $S_2 = \{D, E\}$ betyder att D och E är kvalificerade för jobb 2. Vidare har vi $S_3 = \{D\}$, $S_4 = \{E\}$ och $S_5 = \{A, E, F, G\}$.

Kan platserna besättas? (Nej!)

Vi kan "matematisera" frågan: Givet $S_i, i = 1, 2, \ldots 5$, finns det en mängd bestående av sinsemellan *olika representanter* från S_1 - S_5 (ett s. k. *tvärsnitt* av $S_i, i = 1, 2, \ldots 5$)?

Uppenbarligen inte eftersom unionen av den andra, tredje och fjärde mängden består av bara 2 element.

Allmänt ser vi alltså att det existerar ett tvärsnitt av mängderna S_i, $1, 2, \ldots n$ om och endast om

(3.2)

unionen av vilka k av mängderna som helst innehåller minst k element, $k = 1, 2, \ldots n$.

Det visar sig att detta villkor är både *nödvändigt* och *tillräckligt.*

Teorem 3.3. (Philip Halls teorem) *Det existerar ett tvärsnitt av mängderna* A_1,A_2,... A_n *om och endast om det för varje* k, $1 \leq k \leq n$, *varje union av* k *av de* n *mängderna* A_i, $1 \leq i \leq n$, *innehåller minst* k *element.*

Korollarium. (Tilldelningsteoremet) *Tilldelningsproblemet har lösning om och endast om det för alla tänkbara uppsättningar av* k *arbeten alltid finns sammanlagt minst* k *st. kvalificerade sökande.*

Korollarium. (Giftermålsteoremet) *Givet en mängd män och en mängd kvinnor och det antages att var och en av de* n *männen gör upp en lista på de kvinnor han är villig att gifta sig med. Då kan varje man gifta sig med en kvinna på hans lista om och endast om*

(∗)

för varje val av k *listor,* $1 \leq k \leq n$, *innehåller unionen av dessa minst* k *kvinnor.*

Bevis. Villkoret är givetvis nödvändigt så vi koncentrerar oss på tillräckligheten, dvs. om villkoret är uppfyllt så kan varje man hitta en lämplig kvinna att gifta sig med.

Bevis är ett induktion över r.

För $r = 1$ är saken klar eftersom alla listorna är icke-tomma enligt vårt antagande.

Vi utgår alltså ifrån att $r < n$ av männen lyckats hitta en kvinna att gifta sig med och vi vill visa att det går att hitta ett $r + 1$-sta par. Om det finns en ledig man som på sin lista har någon av de lediga damerna så bildar han och hon paret nr $r + 1$. Om däremot alla lediga mäns listor bara innehåller namn på redan reserverade kvinnor är vi tvungna att bryta upp något eller några av de tidigare bildade r paren.

Välj en ledig man a_0. Hans lista är inte tom [(∗) med $k = 1$] så det finns en kvinna b_1 på hans lista. Hon är emellertid upptagen av en man som vi kallar a_1. a_0:s och a_1:s listor upptar åtminstone en annan kvinna b_2 [(∗) med $k = 2$]. Om b_2 är ledig, stannar vi processen där. Annars konstaterar vi att hon är upptagen av a_2. Men a_0, a_1, a_2 har mellan sig nämnt minst en dam till, a_3 ... Processen fortsätter tills vi hittar en ledig dam b_s. Detta sker senast då vi kommer till a_r. $a_0, a_1, ...a_k$ har på sina listor nämnt minst

$r+1$ damer av vilka bara r är upptagna. - Vi konstaterar att konstruktionen direkt ger följande: b_i finns på minst en lista hos en herre a_j där $j < i$.

b_s, den i processen ovan sista valda damen, är ledig. Hon finns på a_t:s lista där $t < s$ och vi parar ihop dessa två. b_t blir därigenom ledig! Hon kan paras ihop med en herre a_j, $j < t$. Proceduren fortsätter tills en av de damer som blivit fria finns på a_0:s lista.

3.3 Tillämpning på latinska kvadrater och turneringar

En $n \times n$ *latinsk kvadrat* är en kvadratisk matris där

(1) varje rad innehåller talen $1, 2, 3, \ldots n$ precis en gång,

(2) varje kolonn innehåller talen $1, 2, 3, \ldots n$ precis en gång.

En *latinsk rektangel* är en matris med r rader och n kolonner, där $r \leq n$, och

(1) varje rad innehåller talen $1, 2, 3, \ldots n$ precis en gång,

(2) ingen kolonn innehåller något tal mer än en gång.

Vi tillämpar teorin i föregående avsnitt på latinska rektanglar:

Teorem 3.4. *Om $r < n$ kan varje $r \times n$ latinsk rektangel utvidgas till en $(r+1) \times n$ latinsk rektangel.*

[Ordet *utvidgning* används för att indikera att inga rader i den gamla rektangeln behöver ändras.]

Nästa tillämpning gäller *turneringar*. Vi tänker oss att vi har n lag som och alla lag spelar exakt en match mot var och en av motståndarlagen. Det är alltså fråga om en s. k. *enkel serie* eller "round-robin tournament". Antalet matcher är $\binom{n}{2}$.

Antag vidare att reglerna är sådana att det utses en vinnare i varje match. Vinnaren får 1 poäng och förloraren 0. Lagens totalpoäng ordnas i storleksordning med bästa laget först i en "score sequence", ung. resultatföljd, för turneringen.

Exempel. $(2, 2, 1, 0)$ är ingen sådan eftersom summan är 5. Däremot kan man lätt konstruera en turnering med följden $(2, 2, 2, 0)$. $(5, 4, 4, 1, 1, 0)$ duger inte eftersom de tre bottenlagen utkämpar tre matcher *sinsemellan* . De borde alltså ha komma upp till minst tre poäng tillsammans.

Vi måste ha åtminstone följande relationer uppfyllda

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \binom{n}{2}, \tag{3.3}$$

$$(3.4) \qquad \forall r, 2 \le r \le n : \sum_{k=n-r+1}^{n} a_k \ge \binom{r}{2}.$$

Intressant nog är dessa enkla nödvändiga villkor också tillräckliga.

Teorem 3.5. (Landau) *De ickenegativa heltalen*

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_{n-1} \ge a_n$$

är en score sequence, dvs. uppstår som resultatet av en enkel serie för n lag, om och endast om villkoren (3.3) och (3.4) är uppfyllda.

Landaus teorem bevisas med hjälp av en generaliserad version av Giftermålsteoremet:

Teorem 3.6. (Haremsteoremet) *Låt $w_1, \ldots w_n$ vara ickenegativa heltal och antag att var och en av männen $M_1, \ldots M_n$ gör upp en lista på kvinnor han kan tänka sig att gifta sig med. Då kan varje man M_i gifta sig med w_i kvinnor på hans lista om och endast om det för varje delmängd $\{i_1, \ldots i_r\}$ av $1, \ldots n$ gäller att unionen av listorna som männen $M_{i_1}, \ldots M_{i_r}$ skrivit innehåller minst $w_{i_1} + \ldots w_{i_r}$ namn.*

3.4 Om optimala tilldelningar

I avsnitt 3.2 undersöktes existensen av tilldelningar som uppfyller vissa absoluta krav. Här mildras villkoren något: bland många mer eller mindre goda tilldelningar försöker vi välja ut den bästa.

Antag att vi har fyra jobb som skall tilldelas fyra arbetssökande. Dessas lämplighet för ett visst jobb uttrycks med ett talvärde, "poäng". Uppgiften är nu att fördela jobben så att den sammanlagda lämplighetspoängen blir så stor som möjligt.

Kalla jobben a, b, c och d och de sökande A, B, C, D. Det visar sig bekvämast att räkna med kvantitativa uttryck för sökandens brist på lämplighet, "olämplighetspoäng". Låt dessa ges av följande tabell

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D \\ \\ a & 5 & 7 & 15 & 12 \\ b & 8 & 3 & 9 & 10 \\ c & 4 & 14 & 2 & 5 \\ d & 6 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Om exempelvis A tilldelas jobb a, B jobb b, C jobb c och D jobb d så blir olämplighetspoängen 24, vilket naturligtvis inte är minimalt. [Om C och D byter jobb blir poängen genast lägre.]