

Föreläsning 10

Multiplikationsprincipen

Additionsprincipen

Permutationer

Kombinationer

Generaliserade permutationer och kombinationer.

Binomialsatsen

Multinomialsatsen

Lådprincipen (Duvslagsprincipen)

Kombinatorik.

Multiplikationsprincipen

Om man ska utföra k uppgifter, där den första kan utföras på n_1 olika sätt, den andra, efter att den första utförts på n_2 sätt, ..., och den sista på n_k sätt (efter att alla andra utförts), så har man totalt $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ val möjligheter.

Exempel:

Hur många olika registreringsskyltar kan det finnas?

(Oräknat förbjudna kombinationer som exvis (LAM, LAT, LEM, LOJ, LSD, LUS, LUZ, MAD etc) och 'egna skyltar')

Bokstäverna kan väljas på 23 sätt. I, Q, V, Å, Ä, Ö går bort.

Siffrorna kan väljas på 10 sätt. 0-9

Enligt multiplikationsprincipen finns $n = 23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 12167000$

Hur många registreringsskyltar finns det som inte innehåller samma tecken mer än en gång? DVS på formen ABC 123. Inte AFG 464.

Enligt multiplikationsprincipen finns

$$23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7650720 \text{ st}$$

När man valt den första bokstaven, finns det 22 möjligheter kvar att välja nästa bokstav etc.

Menyn på en restaurang består av 7 förrätter 12 huvudrätter och 6 desserter. Hur många ggr kan man äta en 3-rätters middag utan att någonsin äta en likadan måltid.

Enligt multiplikationsprincipen kan man äta $7 \cdot 12 \cdot 6 = 504$ 3-rätters middagar.

Additionsprincipen

Om man ska utföra en av k uppgifter och den första kan utföras på n_1 sätt den andra på n_2 ... och den sista på n_k sätt så har man totalt $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ möjligheter.

Detta är ekvivalent med att om X är en disjunkt union

$$X = \sqcup_{i=1}^k X_i$$

så är $|X| = |X_1| + \dots + |X_k|$

Additionsprincipen ensam löser inga komplicerade problem....

men kombinerat med multiplikationsprincipen är den användbar:

Exempel:

Om varje användare på ett datorsystem ska använda 6, 7, eller 8 tecken i sitt lösenord, och det måste innehålla minst en siffra. Hur många möjliga lösenord finns det då.

Låt L_k vara antalet lösenord med k tecken. Det sökta antalet är enligt additionsprincipen $L = L_6 + L_7 + L_8$.

För att bestämma L_6 bestämmmer vi först antalet lösenord med 6 tecken, med eller utan siffra, sedan drar vi bort antalet ord med 6 tecken som inte har någon siffra (använder add. principen).

26 bokstäver och 10 siffror, ger 36^6 lösenord utan krav på siffra. och 26^6 ord utan siffra, allt enligt mult. principen.

Alltså är $L_6 = 36^6 - 26^6$.

På samma sätt är $L_7 = 36^7 - 26^7$ och $L_8 = 36^8 - 26^8$.

Totalt är $L = \sum_{k=6}^8 36^k - 26^k = 2684483063360$.

Definition Låt $x_1, \dots, x_n$ vara n stycken distinkta (olika) objekt.

En ordnad uppräknings av $x_1, \dots, x_n$ kallas för en *permutation*.

En ordnad uppräknings av $r \leq n$ stycken av $x_1, \dots, x_n$ kallas för en *r-permutation* av $x_1, \dots, x_n$.

Exempel på permutationer av A, B, C, D, E är

$ACDBE$, $DEABC$, $CAEDB$,

Exempel på 2-permutationer av A, B, C, D, E är

BA , DE , CA

Antalet r -permutationer av n distinkta objekt skrivs $P(n, r)$

Sats

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bevis Enligt multiplikationsprincipen är

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Man slutar med faktorn $(n-r+1)$ eftersom då det sista objektet väljs har man valt $r-1$ st och det återstår $n-(r-1) = n-r+1$ st att välja bland. $\square$

Exempel: Antalet permutationer (ord man kan blida) av A, B, C, D, E är $5! = 120$ st.

Antalet 2-permutationer av A, B, C, D är

$$P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \text{ st}$$

Definition Låt $x_1, \dots, x_n$ vara n stycken distinkta (olika) objekt. En r -kombination av $x_1, \dots, x_n$ är ett ordnat urval av r st av dessa.

Exempel på 3-kombinationer av A, B, C, D, E :

A, B, C

A, D, E

B, C, E

A, B, C är samma kombination som B, C, A .

Antalet r -kombinationer av n distinkta objekt skrivs $C(n, r)$ eller $\binom{n}{r}$.

Sats

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bevis objekten i en r -kombination kan ordnas på $r!$ sätt. Alla dessa ordningar svarar precis till de möjliga r -permutationer som består av just dessa objekt. Alltså är, enligt multiplikationsprincipen,

$$r! \binom{n}{r} = P(n, r) \quad \square$$

Exempel: Det finns $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ st 3-kombinationer av A, B, C, D, E

Generaliserade permutationer och kombinationer

Sats. Om man har n objekt varav det är n_1 lika objekt av typ 1, n_2 av typ 2 ... n_m av typ m så går det att ordna objekten på

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \text{ olika sätt}$$

Bevis: se kursboken.

Exempel: Antalet ord man kan bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet $MATTA$ är

$$\frac{5!}{1!2!2!} = \frac{120}{4} = 30 \text{ st.}$$

Jfr antalet ord man kan bilda med $ABCDE = 120$.

Sats Om X är en mängd med t element, så kan man välja ut k stycken element från denna mängd, med repetition tillåten, (((dvs man kan plocka samma element flera ggr))) på

$$\binom{k+t-1}{t-1} = C(k+t-1, t-1) = C(k+t-1, k) = \binom{k+t-1}{k} \text{ olika sätt.}$$

Bevis: $k+t-1$ positioner av $_$. Varje sätt att placera ut $t-1$ st | bland dessa ger ett urval av k st element med repetition tillåtet.

Exempel: På ett kalas finns sju sorters kakor. På hur många olika sätt kan du välja ut 5 olika kakor.

$$t = 7, k = 5 \text{ totalt}$$

$$C(7+5-1, 7-1) = C(11, 6) = \binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462 \text{ st}$$

Exempel: Hur många lösningar har ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

om vi kräver att x_1, x_2, x_3 ska vara heltal ≥ 0 ?

Varje lösning svarar till att välja ut 11 stycken element, med repetition tillåten, ur en mängd med 3 element. (x_1 = antalet ggr man valt den första, etc.)

Vi har alltså $t = 3$, $k = 11$ och

$$C(11 + 3 - 1, 2) = C(13, 2) = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78 \text{ st}$$

Binomialsatsen

Låt $n \geq 1$ vara ett heltal. x, y reella tal. Då är

$$(x + y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Bevis: När man multiplicerar ihop

$$(x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)$$

Får man termen $x^{n-k}y^k$ genom att välja x ur $n - k$ parenteser och y ur övriga k parenteser. Detta kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt. $\square$.

På motsvarande sätt kan man visa

Multinomialsatsen Låt $n \geq 1$ vara ett heltal. $x_1, \dots, x_m$ reella tal. Då är

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

Exempel: Bestäm termen för $x^2y^3z^5$ i utvecklingen av $(x + y + 2)^{10}$

Enligt multinomialsatsen ges den av

$$\frac{10!}{2!3!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520.$$

Lådprincipen I (duvslagsprincipen).

Låt n och r vara två heltal så att $0 < r < n$. Om $n + r$ föremål fördelas på n fack så kommer minst ett föremål innehålla fler än ett föremål.

Exempel: Bland 13 personer finns enligt lådprincipen minst två som fyller år samma månad.

Lådprincipen II Om f är en funktion mellan ändliga mängder X och Y och $|X| > |Y|$ då finns $x_1 \neq x_2$ så att $f(x_1) = f(x_2)$. DVS f kan inte vara injektiv.
Egentligen ekvivalent formulering med I.

Lådprincipen III

Låt k, n, r vara tre heltal sådana att $0 < r < n$. Om $kn + r$ föremål fördelas på n fack, så kommer minst ett fack innehålla fler än k föremål.

Exempel: En tenta som poängsätts mellan 0 och 40 poäng skrivs av 128 studenter.

Det finns 41 möjliga resultat för en tenta.

Då $128 = 3 \cdot 41 + 5$ säger lådprincipen att minst 4 studenter får samma poäng.