

## Grundkurs i statistisk teori, del 2

### Räkneövning 2 - Konstruktion av estimatorer, 27.03.2015

1. Den stokastiska variabeln  $X$  har täthetsfunktionen  $f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$  för  $x \geq 0$  och  $\Omega_\theta = \{2, 3, 4\}$ . Antag att vi har tillgång till två observationer,  $x_1 = 0.2$  och  $x_2 = 0.8$ , av variabeln.

- (a) Beräkna likelihood-funktionens värde för de tre möjliga utfallen på  $\theta$ .
- (b) Bestäm ML-estimatet av  $\theta$  utgående från resultatet i (a).

2. Den stokastiska variabeln  $X$  har täthetsfunktionen  $f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$  för  $x \geq 0$  och  $\Omega_\theta = \{2, 3, 4\}$ . Antag att vi har tillgång till två observationer,  $x_1 = 0.2$  och  $x_2 = 0.8$ , av variabeln.

- (a) Beräkna  $\mathbb{E}(X) = \mu(\theta)$  som en funktion av  $\theta$ .
- (b) Beräkna  $Q(\theta) = \sum_{j=1}^n (x_j - \mu(\theta))^2$  för de tre möjliga utfallen på  $\theta$  och bestäm MK-estimatet.

3. Låt  $X = (X_1, \dots, X_n)$  vara  $n$  i.i.d. stokastiska variabler med likformig  $U(0, \theta)$ -fördelning där  $\theta > 0$ , dvs

$$f(x_j; \theta) = \frac{1}{\theta} \text{ för } x_j \in (0, \theta).$$

Härled MK-estimatoren för parametern  $\theta$ .

4. (a) Låt  $X = (X_1, \dots, X_n)$  vara  $n$  i.i.d. stokastiska variabler med  $Poisson(\lambda)$ -fördelning där  $\lambda > 0$ , dvs

$$p(x_j; \lambda) = \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda} \text{ för } x_j \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Härled ML-estimatoren för parametern  $\lambda$ .

- (b) Antalet olycksfall under en månad vid en industri antas vara  $Poisson(\lambda)$ -fördelad. Under ett år inträffade

0   0   3   1   1   2   0   0   2   0   1   0

olycksfall under de tolv månaderna. Beräkna ML-estimatet av  $\lambda$ .

5. Den stokastiska variabeln  $X$  har täthetsfunktionen  $f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$  för  $x \geq 0$  och  $\Omega_\theta = (1, \infty)$ . Antag att vi har tillgång till två observationer,  $x_1 = 0.2$  och  $x_2 = 0.8$ , av variabeln.

- (a) Beräkna ML-estimatet av  $\theta$ . (Jämför med resultatet från 1(b))
- (b) Beräkna MK-estimatet av  $\theta$ . (Jämför med resultatet från 2(b))