Kapitel 7

Några vanliga försökssituationer

Binomial försökssituation

Betrakta ett försök och en händelse A vid detta försök. Antag att A inträffar med sannolikheten p, dvs $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p$. Låt ξ vara en stokastisk variabel som får värdet 1 om A inträffar och 0 om A inte inträffar, dvs

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{om } \omega \in \mathrm{A}, \\ 0, & \text{om } \omega \notin \mathrm{A}. \end{cases}$$

Vi upprepar försöket n gånger och betecknar variabeln ξ vid dessa upprepningar med $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Antag att $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ är oberoende. Vi har

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\xi) = 1 \cdot \mathrm{P}(\xi = 1) + 0 \cdot \mathrm{P}(\xi = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = p, \\
&\mathrm{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot \mathrm{P}(\xi = 1) + 0^2 \cdot \mathrm{P}(\xi = 0) = p, \\
&\mathrm{V}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - \big(\mathrm{E}(\xi)\big)^2 = p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}(\xi_1) = ... = \mathrm{E}(\xi_n) = p, \\
&\mathrm{V}(\xi) = \mathrm{V}(\xi_1) = ... = \mathrm{V}(\xi_n) = p(1-p).
\end{aligned}$$

Inför variabeln

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n.$$

Då gäller

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\eta) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\xi_i) \;=\; np,\\
\mathrm{V}(\eta) &= \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(\xi_i) \;=\; np(1-p),
\end{aligned}
$$

ty variablerna $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ är oberoende.

Vi bestämmer frekvensfunktionen för η. Eftersom $\Omega_\xi = \{0,1\}$ blir $\Omega_\eta = \{0,1,...,n\}$. Betrakta

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\eta = 0) = \mathrm{P}(\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_n = 0)\\
&= \mathrm{P}(\xi_1 = 0)\ \mathrm{P}(\xi_2 = 0) \cdot ... \cdot \mathrm{P}(\xi_n = 0)\\
&= (1-p)^n,
\end{aligned}
$$

där vi utnyttjat att $\xi_1, ..., \xi_n$ är oberoende. Låt för ett fixt i

$$\mathrm{A}_i = \{\xi_i = 1,\ \xi_1 = ... = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = ... = \xi_n = 0\}.$$

Vi har

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = p(1-p)^{n-1},$$

och följaktligen

$$\mathrm{P}(\eta = 1) \;=\; \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}.$$

Vidare sättes för fixa $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n, \quad (k \le n)$

$$\mathrm{A}_{i_1, i_2, ..., i_k} = \{\xi_i = 1 \text{ för } i \in \{i_1, ..., i_k\}, \quad \xi_i = 0 \text{ för övrigt}\}.$$

Vi har

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{i_1, i_2, ..., i_k}) \;=\; p^k (1-p)^{n-k}$$

och

$$\mathrm{P}(\eta = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

där $\binom{n}{k}$ är antalet sätt att välja de k stycken ξ_i:na som är lika med 1.

Härav följer att $\boldsymbol{\eta \sim \mathrm{Bin}(n, p)}$.

Exempel 7.1 Vad är sannolikheten att erhålla exakt 2 sexor vid 12 kast med en symmetrisk tärning? Vi upprepar försöket "utför ett kast med en tärning och notera ögontalet" 12 gånger. Händelsen som studeras är A = {erhålla en sexa}. Vid detta försök är P(A) = $\frac{1}{6}$ och den sökta sannolikheten blir

$$\binom{12}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0,296.$$

En binomialfördelning har två parametrar, n och p, och är därför besvärlig att tabulera och att använda vid numeriska beräkningar. En binomialfördelning kan dock under förutsättning att n är stort och p litet approximeras med en Poissonfördelning. Av detta följer att en Poissonfördelning uppkommer i försökssituationer där det utförs ett stort antal upprepningar och sannolikheten för en viss händelse är liten. Antalet gånger denna händelse inträffar är "nästan" Poissonfördelad med parametern $\lambda = np$.

Poissonfördelningen är också lättare att behandla numeriskt. Den har endast en parameter (λ) och fördelningen är färdigt tabulerad för många värden på λ.

Vi skall nu bevisa ovanstående approximationspåstående:

Låt

$$\begin{aligned} f(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n, \ \text{och} \\ g(k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \ k = 0, 1, 2, ... \ . \end{aligned}$$

Vi bör således bevisa för varje k $\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} f(k) = g(k)$, där $n \to \infty$ och $p \to 0$ så att $np \to \lambda (> 0)$.

Betrakta för ett fixt k

$$\begin{aligned} f(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)}^{k \text{ st.}}}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}(np)^k \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{n^k} (np)^k \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n (1-p)^{-k} \ \to \ g(k) \end{aligned}$$

då $n \to \infty$ och $p \to 0$ så att $np \to \lambda$.

Det är klart att denna approximation blir bättre då n ökar och/eller p minskar. Som tumregel kan man använda att n bör bara minst 10 och p högst 0,1.

Exempel 7.2 Låt $\xi \sim \text{Bin}(10,\ 0{,}1)$ och $\eta \sim \text{Po}(1)$, $(\lambda = 1 = 10 \cdot 0{,}1 = \text{np})$.

Vi har

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_\xi(x)$	0,3487	0,3874	0,1937	0,0574	0,0112	0,0015	0,0001	~ 0	~ 0
$f_\eta(x)$	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	~ 0.

Hypergeometrisk försökssituation

Betrakta en mängd (population) med N element varav N_1 är av typ I och N_2 är av typ II, $N = N_1 + N_2$. Vi väljer ur denna population n element utan återläggning (antag $n \leq \min(N_1, N_2)$). Låt η vara antalet bland dessa n som är av typ I (jfr övningsuppgifterna 3.7, 3.14 och Exempel 5.7). Då gäller

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n,$$

där

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{om det } i\text{:te dragna elementet är av typ I,} \\ 0, \text{annars.} \end{cases}$$

Men variablerna $\xi_1, ..., \xi_n$ är inte oberoende. Betrakta t.ex. variabeln (ξ_1, ξ_2). Vi har $\Omega_{(\xi_1,\xi_2)} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

		x_1: 0	1	$f_{\xi_2}(x)$
x_2 :	0	$\frac{N_2}{N}\ \frac{N_2-1}{N-1}$	$\frac{N_1}{N}\ \frac{N_2}{N-1}$	$\frac{N_2}{N}$
	1	$\frac{N_2}{N}\ \frac{N_1}{N-1}$	$\frac{N_1}{N}\ \frac{N_1-1}{N-1}$	$\frac{N_1}{N}$
	$f_{\xi_1}(x)$	$\frac{N_2}{N}$	$\frac{N_2}{N}$	1

Följaktligen är ξ_1 och ξ_2 beroende.

Vi bestämmer frekvensfunktionen för η

$$\begin{aligned} \text{P}(\eta = 0) \ &= \ \text{P}(\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_n = 0) \ = \ \text{P}(\xi_1 = 0)\ \text{P}(\xi_2 = 0|\xi_3 = 0) \\ &\text{P}(\xi_3 = 0|\xi_2 = \xi_1 = 0) \cdot ... \cdot \text{P}(\xi_n = 0|\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_{n-1} = 0) \\ &= \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_2 - 1}{N - 1} \cdot ... \cdot \frac{N_2 - (n-1)}{N - (n-1)}. \end{aligned}$$

Sätt för ett fixt i

$$\text{A}_i = \{\xi_i = 1,\ \xi_1 = ... = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = ... = \xi_n = 0\}.$$

Vi har

$$P(A_1) = ... = P(A_n) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N-1} \cdot \frac{N_2-1}{N-2} \cdot ... \cdot \frac{N_2-(n-2)}{N-(n-1)},$$

och följaktligen

$$\begin{aligned} P(\eta = 1) &= \binom{n}{1} \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N-1} \cdot ... \cdot \frac{N_2-(n-2)}{N-(n-1)} \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N-1} \cdot ... \cdot \frac{N_2-(n-2)}{N-(n-1)} \\ &= \frac{\binom{N_1}{1}\binom{N_2}{n-1}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

För fixa $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ sättes

$$A_{i_1,i_2,...,i_k} = \{\xi_i = 1 \text{ för } i \in \{i_1, ..., i_k\},\ \xi_i = 0 \text{ för övrigt}\}.$$

Vi har

$$P(A_{i_1,i_2,...,i_k}) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1-1}{N-1} \cdot ... \cdot \frac{N_1-(k-1)}{N-(k-1)} \cdot \frac{N_2}{N-k} \cdot \frac{N_2-1}{N-k-1} \cdot ... \cdot \frac{N_2-(n-k-1)}{N-(n-1)},$$

och följaktligen

$$P(\eta = k) = \binom{n}{k} \frac{\frac{N!}{(N_1-k)!} \cdot \frac{N!}{(N_2-(n-k))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Således är $\boldsymbol{\eta}$ hypergeometriskt fördelad med parametrarna $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N_1}$ och $\boldsymbol{n}$, och

$$\begin{aligned} E(\eta) &= n \cdot \frac{N_1}{N} \\ V(\eta) &= n \cdot \frac{N_1}{N} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

(Se Exempel 4.17.)

Då kvoten $\frac{n}{N}$ är liten kan en hypergeometrisk fördelning med parametrarna N, N_1 och n approximeras med en binomialfördelning med parametrarna n och $p = \frac{N_1}{N}$. En tumregel är att $\frac{n}{N}$ bör vara mindre än 0,1.

Exempel 7.3 Betrakta en urna som innehåller 25 kulor varav 5 är röda. Vi drar två kulor utan återläggning. Vad är sannolikheterna att erhålla 0, 1 resp. 2 röda kulor?

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\eta = 0) &= \frac{\binom{20}{2}\binom{5}{0}}{\binom{25}{2}} \simeq 0,6333 \\
\mathrm{P}(\eta = 1) &= \frac{\binom{20}{1}\binom{5}{1}}{\binom{25}{2}} \simeq 0,3333 \\
\mathrm{P}(\eta = 2) &= \frac{\binom{20}{0}\binom{5}{2}}{\binom{25}{2}} \simeq 0,0333 \\
&\Sigma \simeq 1
\end{aligned}$$

Eftersom $\frac{n}{N} = \frac{2}{25} = 0,08 < 0,1$ approximerar vi denna fördelning med en binomialfördelning med parametrarna $n = 2$ och $p = \frac{5}{25}$ (proportionen för röda kulor):

$$\eta \overset{appr.}{\sim} \mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\eta = 0) &= \binom{2}{0} \, 0,2^0 \; 0,8^2 \; = 0,6400 \\
\mathrm{P}(\eta = 1) &= \binom{2}{1} \, 0,2^1 \; 0,8^1 \; = 0,3200 \\
\mathrm{P}(\eta = 2) &= \binom{2}{2} \, 0,2^2 \; 0,8^0 \; = 0,0400 \\
&\Sigma = 1
\end{aligned}$$

Normalfördelningen och den centrala gränsvärdessatsen

Normalfördelningen har en central ställning inom sannolikhetsläran och statistiken. Detta beror på de många goda egenskaper som den har, och framför allt på följande.

Sats 7.4 (Den centrala gränsvärdessatsen) Låt $\xi_1, \xi_2, ...$ vara en följd av oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler med väntevärdet μ och variansen σ^2. Då gäller för summan $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ att

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Med andra ord $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \overset{appr.}{\sim} \mathrm{N}(\mathrm{n}\mu, \sigma\sqrt{\mathrm{n}})$ förutsatt att n är tillräckligt stort. Observera att $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = n\mu$ och $\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = n\sigma^2$, $(\mathrm{D}(\xi) = \sigma\sqrt{\mathrm{n}})$.

Den centrala gränsvärdessatsen är ett mycket starkt teorem, dvs antalet antaganden är litet och resultatet är ytterst användbart både teoretiskt och praktiskt. T.ex. om vi kan framställa en stokastisk variabel som en summa av ett stort antal stokastiska variabler så följer ur den centrala gränsvärdessatsen att den betraktade variabeln är approximativt normalfördelad.

Följande egenskap hos normalfördelade variabler är viktig.

Sats 7.5 Låt $\xi_i \sim \mathrm{N}(\mu_\mathrm{i}, \sigma_\mathrm{i})$ och oberoende för $i = 1, ..., n$, och inför variabeln $\eta = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$. Då gäller $\eta \sim \mathrm{N}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i}\mu_\mathrm{i},\ \sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i^2}\sigma_\mathrm{i}^2}\right)$.

Anmärkning 7.6

(i) Om $\xi_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, så gäller $\sum_{i=1}^n \xi_i \sim \mathrm{N}(\mathrm{n}\mu, \sigma\sqrt{\mathrm{n}})$.

(ii) Om $\xi_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, så gäller $\bar{\xi_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right)$.

(iii) Om $\xi_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$ och $\xi_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$, så gäller $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ och $\xi_1 - \xi_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Exempel 7.7 (Moivres-Laplace lag) Om ξ är binomialfördelad med parametrarna n och p, så gäller

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \le x\right) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

där $q = 1 - p$.

Vi har tidigare bevisat att ξ kan skrivas som summan av oberoende och identiskt fördelade variabler ξ_i. Dessa variabler har en två-punktsfördelning på $\{0, 1\}$ med $\mathrm{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathrm{P}(\xi = 0)$. Påståendet följer då direkt ur den centrala gränsvärdessatsen.

Med andra ord, om $\xi \sim \mathrm{Bin(n, p)}$ och n är tillräckligt stort, så gäller $\xi \overset{appr.}{\sim} \mathrm{N}(\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}})$. En tumregel är att $np(1-p)$ bör vara större än 5.

Exempel 7.8 Låt ξ_1 och ξ_2 vara oberoende samt $\xi_i \sim \mathrm{N}(3,\ 1{,}5)$ och $\xi_i \sim \mathrm{N}(5,\ 2)$. Bilda variabeln $\eta = 2\xi_1 - \xi_2$. Då gäller att

$$\mathrm{E}(\eta) = 2\mathrm{E}(\xi_1) - \mathrm{E}(\xi_2) = 1$$
$$\mathrm{V}(\eta) = 4\mathrm{V}(\xi_1) + \mathrm{V}(\xi_2) = 4 \cdot 2{,}25 + 4 = 13$$

och $\eta \sim \mathrm{N}(1, \sqrt{13})$.

Exempel 7.9 En hiss avsedd för 10 personer fungerar inte om belastningen överstiger 800 kg. Vad är sannolikheten att hissen inte fungerar om 10 personer med vikten i kg, som är oberoende och normalfördelad med $\mu = 70$ och $\sigma = 10$, går in i hissen?

Låt $\xi_1, i = 1, ..., 10$ vara vikten av den i:te personen. Då gäller att $\eta = \sum_{i=1}^{10} \xi_1 \sim \mathrm{N}(700,\ 10\sqrt{10})$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\eta) > 800 &= \mathrm{P}\left(\frac{\eta - 700}{10\sqrt{10}} > \frac{800 - 700}{10\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathrm{P}(\zeta > \sqrt{10}) \ \text{ där } \zeta = \frac{\eta - 700}{10\sqrt{10}} \\
&= 1 - \phi(\sqrt{10}) \ \simeq \ 1 - \phi(3,\ 16) \ \simeq \ 0,0008.
\end{aligned}$$

Exempel 7.10 Variabeln ξ är exponentialfördelad med parametern $\lambda = 2$. Vi gör 100 observationer av denna variabel. Bestäm med hjälp av den centrala gränsvärdessatsen sannolikheten att högst 50 av dessa är mindre än 0,5.

I. Vi har $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2x},\ x > 0$ och

$$\mathrm{P}(\xi < 0,5) \ = \ \int_0^{0,5} 2e^{-2x}\, dx \ = \ 1 - e^{-1} \ \simeq \ 0,632.$$

II. Låt $\xi_1, ..., \xi_{100}$ vara de 100 observationerna på ξ och η = antalet bland dessa som är mindre än 0,5.

$$\theta_i = \{\xi_i < 0,5\}$$

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{om } \xi_i < 0,5 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$\eta = \sum_{i=1}^{100} \eta_i$ = antalet bland 100 som är mindre än 0,5.

$$\eta \sim \mathrm{Bin}(100,\ 1 - \mathrm{e}^{-1}),$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(\eta_i = 1) = \mathrm{P}(\xi_i < 0,5) = 1 - e^{-1}.$$

$$\mathrm{P}(\eta \leq 50) \ = \ \sum_0^{50} \binom{100}{k} (1 - e^{-1})^k \ (e^{-1})^{100-k}$$

III. Eftersom $np(1-p) = 100(1 - e^{-1})e^{-1} > 5$ approximerar vi denna sannolikhet med en normalfördelning med $\mu = np = 63,2$ och $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4,8$. Då vi approximerar en fördelning, där massan ligger på heltalspunkter, med en normalfördelning bör vi använda s.k. **kontinuitetskorrektion**. Denna innebär att t.ex. $\mathrm{P}(\eta = 50) = \mathrm{P}(49,5 < \eta < 50,5)$. Observera att om vi **inte** gör denna korrektion så ger normalfördelningen att $\mathrm{P}(\eta = 50) = 0$ vilket är orimligt.

Vi har

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\eta \leq 50) &= \mathrm{P}(\eta < 50,5) = \mathrm{P}\left(\frac{\eta - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{50,5 - 63,2}{4,8}\right) \\ &= \sigma(-2,64) \sim 0,004. \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

1. Sannolikheten att en viss typ av frön skall gro och ge upphov till en planta är 0,6. Man planterar 10 sådana frön. Händelserna att olika frön gror och ger upphov till plantor är oberoende. Låt ξ vara antalet erhållna plantor. Beräkna

   a) $\mathrm{E}(\xi)$ och $\mathrm{V}(\xi)$, b) $\mathrm{P}(\xi > 0)$, c) $\mathrm{P}(|\xi - 6| < 2)$.

2. Anders kastar tre gånger med ett symmetriskt mynt, Jerker två gånger. Bestäm sannolikheten att Jerker och Anders erhåller lika antal krona.

3. Fem passagerare stiger på ett tåg med tre vagnar. Passagerarna väljer vagn slumpmässigt och oberoende av varandra. Beräkna sannolikheten att exakt tre passagerare väljer första vagnen i tåget.

4. I ett försök inträffar minst en av händelserna A, B och C. Sannolikheten att alla tre inträffar är 0,1 och sannolikheten att minst två inträffar är 0,7. Man utför tre oberoende upprepningar av detta försök. Betrakta antalet försök i vilka exakt två av händelserna A, B och C inträffar som en stokastisk variabel, och bestäm väntevärde och varians för denna.

5. Betrakta ett försök med två utfall, A och $\mathrm{B} = \mathrm{A}^c$. En serie omfattande n oberoende försök utföres. Sannolikheten att A skall inträffa är i första försöket Π_1, i andra försöket Π_2 etc. och i försök i således Π_i. Antalet gånger A inträffar är en stokastisk variabel ξ. Ange $\mathrm{E}(\xi)$ och $\mathrm{V}(\xi)$. Under vilken förutsättning är ξ en binomialfördelad stokastisk variabel?

6. Antalet bakterier i 0,0001 cm^3 av en viss sorts mjölk antas vara Poissonfördelat med $\lambda = 15$. Man räknar antalet bakterier i 0,0001 cm^3 av mjölken med hjälp av ett mikroskop. Låt ξ vara det härvid räknade antalet bakterier. Bestäm

   a) $\mathrm{P}(\xi > 0)$, b) $\mathrm{E}(\xi)$ och $\mathrm{V}(\xi)$.

7. Sören har en grålurvig keeshound (holländsk spets), som i genomsnitt har 1 loppa/10 cm^2. Antalet loppor/ytenhet kan betraktas som en Poissonfördelad stokastisk variabel. Vad är sannolikheten att en klapp från lilla Rita träffar åtminstone 1 loppa om klappen täcker ett område av 25 cm^2?

8. Ett mottaget varuparti består av 3000 lampor. Sannolikheten att en lampa är trasig är 10^{-3}. Vad är sannolikheten att fler än 5 lampor är trasiga?

9. En Poissonfördelad variabel har medelvärdet 2. Sök sannolikheten att i ett stickprov på 5 individer minst 4 har värden på ovanstående variabel, vilka är större än 3.

10. Efter en bridgegiv har Nord fått 5 spader, 3 hjärter och 5 klöver. Bestäm väntevärdet och variansen för antalet spader hos Syd.

11. Ett lotteri består av 100 000 lotter varav 100 utfaller med vinst. I en stad köps 1000 lotter. Ange uttryck för sannolikheten att exakt en vinst tillfaller staden genom att utnyttja

    a) hypergeometrisk fördelning,

    b) binomialfördelning,

    c) Poissonfördelning.

12. Per har två urnor, A och B. Urnorna innehåller vardera 20 kulor varav i urna A 5 är vita och i urna B 10 är vita. Per drar utan återläggning 4 kulor ur vardera urnan. Visa att variansen i totalantalet erhållna vita kulor med detta förfarande blir mindre än om urnornas innehåll från början slagits samman och 8 kulor uttagits bland samtliga kulor utan återläggning.

13. (Geometrisk fördelning) Man kastar en symmetrisk tärning tills man får en sexa första gången. Låt ξ vara antalet erforderliga kast. Bestäm frekvensfunktionen för ξ samt beräkna $\mathrm{E}(\xi)$ och $\mathrm{V}(\xi)$. Vad är sannolikheten att det erfordras ett udda antal kast?

14. (Pascalfördelning) För en tillverkningsprocess är sannolikheten för defekt enhet lika med 0,2. Man tillverkar enheter tills man första gången har fått fem defekta enheter. Vad är sannolikheten att detta sker för den 20:e tillverkade enheten?

15. Vikten av en låda med apelsiner kan betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med $\mu = 19,50$ kg och $\sigma = 2,00$ kg. Vad är sannolikheten att av 4 slumpmässigt valda lådor minst 1 väger mera än 21,85 kg?

16. I ett belysningsnät används 550 glödlampor vilkas livslängd i timmar antas vara normalfördelad med $\mu = 1500$ och $\sigma = 75$. I stället för att byta ut en lampa så fort den gått sönder, besluter man att i stället byta ut alla lampor mot nya vid regelbundet återkommande tillfällen. Hur ofta bör detta ske, om man räknar med att ca 50 lampor skall ha slocknat vid bytet?

17. I en sorteringsmaskin sorteras ägg efter vikten ξ. Härvid sorteras äggen i följande viktklasser:

    A. $\xi \leq 25$ B. $25 < \xi \leq 35$ C. $35 < \xi \leq 45$
    D. $45 < \xi \leq 55$ E. $\xi > 55$.

    Om äggens vikt är normalfördelad med $\mu = 42,0$ och $\sigma = 5,2$, hur många ägg kommer att i det långa loppet sorteras proportionsvis i de olika klasserna?

18. Vikten i gram av en viss typ av konserver är normalfördelad med $\sigma = 8$. Väntevärdet μ kan man lätt reglera genom att justera påfyllningsmaskinen. Vilket är det lägsta tillåtna värdet på μ om man vill att högst 1 % av konserverna skall ha en vikt understigande 280 g?

19. En stokastisk variabel är normalfördelad med $\mu = 80$ och $\sigma = 12$. Vi gör 50 oberoende observationer av variabeln och bildar summan av dessa. Denna summa utgör en ny stokastisk variabel η. Sök ett tal k sådant att $\mathrm{P}(\eta \geq k) = 0,05$.

20. Låt ξ vara normalfördelad med $\mu = 50$ och $\sigma = 5$. Ett stickprov tages på variabeln. Vilken minsta stickprovsstorlek bör väljas, för att stickprovets medelvärde skall ha minst 90 % chans att hamna mellan 48 och 52?

21. En lastbil lastas med lådor av tre typer till ett antal av 10, 40 resp. 80. Lådornas vikter är normalfördelade stokastiska variabler, vars respektive väntevärden och standardavvikelser är (100;10), (50;5) och (25;4). Beräkna sannolikheten att bilens last väger mer än 5100 kg.

22. Vikten i g av en viss typ av granater är normalfördelad med $\sigma = 8$. Man kasserar vid tillverkningen alla granater, vars vikt överstigen 420 g. Vid tillverkning av 800 granater fann man att 20 kasserats på grund av övervikt. Bestäm med ledning härav ett närmevärde för μ.

23. De stokastiska variablerna $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{50}$ är oberoende och exponentialfördelade med parametern $\lambda = 1$. Bestäm med hjälp av den centrala gränsvärdessatsen sannolikheten att
$$\eta = \sum_{i=1}^{50} \xi_i > 50.$$

24. Vid ett försök studerades Poissonfördelad variabel ξ för vilken $\mathrm{E}(\xi) = 1$. Försöket upprepades 200 gånger. Sök sannolikheten att antalet försök, där $\xi \leq 2$ är större än 180.

25. Låt $\xi_1, \xi_2, ...$ vara oberoende och identiskt binomialfördelade med parametrarna $m = 10$ och $p = \frac{1}{2}$. Bestäm med hjälp av den centrala gränsvärdessatsen ett värde på n så att sannolikheten att
$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$
avviker från $\mathrm{E}(\bar{\xi}_n)$ med mer än 0,1 är mindre än 0,05.

26. Lilla Rita kastar 105 gånger med en symmetrisk tärning och summerar antalet ögon i de 105 kasten. Denna summa är en stokastisk variabel vilken betecknas med η. Bestäm $\mathrm{P}(333 \leq \eta < 402)$!

27. Ett försök tillgår så att ett symmetriskt mynt kastas 100 gånger, varvid antalet klave och krona noteras. Försöket upprepas tre gånger. Bestäm sannolikheten att i minst två av dessa försök erhålla mer än 55 klave.

28. Vid en spikfabrik förpackas spikar i lådor med 100 spikar i varje låda. Det har visat sig att spikarna har en medelvikt om 4 g och standardavvikelse 0,2 g. Lådornas vikt kan betraktas som en normalfördelad variabel med $\mu = 26$ g och $\sigma = 1,5$ g. Vad är sannolikheten att en slumpvis vald låda tillsammans med sitt innehåll väger mer än 430 g?

29. Bestäm ett tal k sådant att sannolikheten är omkring 0,5 att antalet krona erhållet vid 1000 kast med ett symmetriskt mynt ligger mellan 490 och k, gränserna inbegripna.