Kapitel 1

Mängdlära

Begreppet mängd är fundamentalt i vårt tänkande; en mängd är helt allmänt en samling av objekt, vars antal kan vara ändligt eller oändligt. I matematiken kallas dessa objekt mängdens element. En mängd, som inte innehåller några element, kallas **den tomma mängden, bet. $\emptyset$**.

Mängder och element skall här betecknas med stora respektive små bokstäver. Att ett element a tillhör en mängd A betecknas $\boldsymbol{a \in \mathbf{A}}$. Om en mängd A har ett ändligt antal element betecknas detta antal med $\mathbf{n(A)}$.

Definition 1.1 Mängden A är **delmängd** till mängden B om varje element i A också är element i B; bet. $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$. Den tomma mängden $\emptyset$ är enligt överenskommelsen en delmängd av varje mängd: $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$ för varje A. Om det gäller att $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ och $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ säges A och B vara lika; bet. $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Definition 1.2 **Unionen** (eller föreningsmängden) av två mängder $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ (bet. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, läses "A union B") är mängden av de element som tillhör åtminstone en av mängderna $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$.

Alltså: $a \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Leftrightarrow a \in \mathrm{A}$ och/eller $a \in \mathrm{B}$. Observera att $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \mathrm{A}$ och $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \emptyset$.

Definition 1.3 **Snittmängden** av två mängder $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ (bet. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, läses "A snitt B") är mängden av de element som tillhör både A och B.

Alltså: $a \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Leftrightarrow a \in \mathrm{A}$ och $a \in \mathrm{B}$. Observera att $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathrm{A}$ och $\emptyset = \emptyset \cap \mathrm{A}$.

Om två mängder $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ inte har något gemensamt element så är snittet $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ tomt; mängderna A, B säges då vara **disjunkta**.

Låt $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ vara en följd av mängder. Vi inför följande beteckningar

$$\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup ... \cup \mathrm{A}_n := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n := \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Definition 1.4 Komplementmängden eller komplementet till en mängd A med avseende på en annan mängd B (bet. $B - A$) är mängden av de element som tilhör B men inte A. Om alla betraktade mängder är delmängder till en given grundmängd Ω används beteckningen A^c i stället för $\Omega - A$.

Alltså: $a \in B - A \Leftrightarrow a \notin A$ och $a \in B$. Observera att $A = (A^c)^c$, $\Omega = A^c \cup A$, $A^c \cap A = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$ och $\Omega^c = \emptyset$.

Sats 1.5

a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (kommutativa lagar)

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativa lagar)
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva lagar)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sats 1.6

a) Mängderna $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ är parvis disjunkta och
$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.

b) (de Morgans formler)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

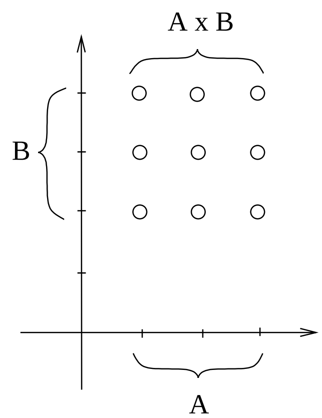
Definition 1.7 Produktmängden av två icke-tomma mängder A_1 och A_2 (bet. $A_1 \times A_2$, läses "A_1 kryss A_2") är mängden av alla ordnade par $\bar{a} = (a_1, a_2)$ sådana att $a_1 \in A_1$ och $a_2 \in A_2$.

Alltså $\bar{a} = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \Leftrightarrow a_1 \in A_1$ och $a_2 \in A_2$. Om $A_1, ..., A_n$ är icke-tomma mängder har vi följande beteckning

$$\begin{aligned} X_{i=1}^{n} A_i &=: A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \\ &= \{(a_1, ..., a_n) : \ a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\} \end{aligned}$$

Exempel 1.8 Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Då är $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$. $A \times B = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 2),\ (3, 3),\ (3, 4)\}$.

I figuren har $A \times B$ åskådliggjorts grafiskt.



Betrakta följande delmängder till $A \times B$:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{(a, b) : b - a = 1\} \\
C_2 &= \{(a, b) : a > b\} \\
C_3 &= \{(a, b) : a + b \text{ är högst } 4\} = \{(a, b) : a + b \leq 4\} \\
C_4 &= \{(a, b) : a + b \text{ är minst } 5\} = \{(a, b) : a + b \geq 5\}
\end{aligned}
$$

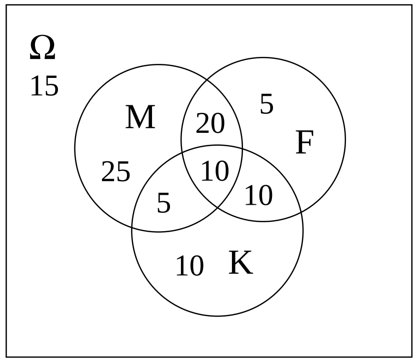
Ur figuren fås direkt att

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4)\} \\
C_2 &= \{(3, 2)\} \\
C_3 &= \{(1, 2),\ (2, 2),\ (1, 3)\} = C_4^c = A \times B - C_4.
\end{aligned}
$$

Exempel 1.9 Vid en naturvetenskaplig fakultet har eleverna avlagt betyg i nedanstående ämnen enligt följande:

60 % i matematik
45 % i fysik
35 % i kemi
30 % i både matematik och fysik
15 % i både matematik och kemi
20 % i både fysik och kemi
10 % i matematik, fysik och kemi

Låt M, F och K vara mängden av de studerande som har betyg i matematik, fysik och kemi, respektive. Alltså:



Antag att totala antalet studerande är 100. Vi har

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{n}(\Omega) = 100,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M}) = 60\\
&\mathrm{n}(\mathrm{F}) = 45\\
&\mathrm{n}(\mathrm{K}) = 35\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{F}) = 30\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{K}) = 15\\
&\mathrm{n}(\mathrm{F} \cap \mathrm{K}) = 20\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{F} \cap \mathrm{K}) = 10
\end{aligned}
$$

Alltså

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{K} - \mathrm{F}) = \mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{K} - \mathrm{M} \cap \mathrm{F} \cap \mathrm{K}) = \mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{K}) - \mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{F} \cap \mathrm{K}) = 15 - 10 = 5,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{F} \cap \mathrm{K} - \mathrm{M}) = 20 - 10 = 10,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cap \mathrm{F} - \mathrm{K}) = 30 - 10 = 20,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} - \mathrm{K} \cup \mathrm{F}) = 60 - (5 + 10 + 20) = 25,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{F} - \mathrm{M} \cup \mathrm{K}) = 45 - (20 + 10 + 10) = 5,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{K} - \mathrm{M} \cup \mathrm{F}) = 35 - (5 + 10 + 10) = 10,\\
&\mathrm{n}(\mathrm{M} \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{K})^c = 100 - (25 + 20 + 10 + 5 + 10 + 10 + 5) = 15
\end{aligned}
$$

Ur figuren framgår omedelbart t.ex. att 85 % har avlagt betyg i minst ett av ämnena, och vidare $\frac{40}{45} = 89$ % av studerandena med betyg i fysik har också betyg i matematik och/eller kemi.

Övningsuppgifter

1. Bevisa Sats 1.5

2. Bevisa Sats 1.6

3. Låt A vara mängden $\{a, b\}$. Räkna upp elementen i $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ och $\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A}$. Hur många element ingår i mängden $\underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times ... \times \mathrm{A}}_{n \text{ stycken}}$?

4. Låt A, B och C vara delmängder till en grundmängd Ω. Uttryck följande mängder i A, B och C med hjälp av operationerna $\cup$, $\cap$ och ^{c}.

   a) $\{a : a \in$ alla mängderna A, B och C$\}$
   b) $\{a : a \in$ ingen av mängderna A, B och C$\}$
   c) $\{a : a \in$ exakt en av mängderna A, B och C$\}$
   d) $\{a : a \in$ exakt två av mängderna A, B och C$\}$
   e) $\{a : a \in$ åtminstone en av mängderna A, B och C$\}$

5. Visa att $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} \neq \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$, men ge även något specialfall där likheten gäller.

6. Visa att

   a) $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{n}(\mathrm{A}) + \mathrm{n}(\mathrm{B}) - \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
   b) $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{n}(\mathrm{A}) + \mathrm{n}(\mathrm{B}) + \mathrm{n}(\mathrm{C}) - \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{n}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) + \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

7. Vid ett amerikanskt delstatsval hade ett visst parti nominerat tre kandidater A, B och C för tre olika politiska befattningar. För att utröna de tre kandidaternas popularitet hos väljarna uttogs ett stickprov på 200 väljare. Följande resultat erhölls:

   28 röstade på såväl A som B
   98 röstade på A och/eller B, men inte på C
   42 röstade på B men varken på A eller C
   122 röstade på B och/eller C, men inte på A
   64 röstade på C men varken på A eller B
   14 röstade på A och C , men inte på B .

   Hur många väljare röstade på a) A och B men inte på C? b) endast en av de tre kandidaterna?