Grundkursen i sannolikhetslära 24.03.00, förslag till lösningar

1. Använd sats 2.7

2. Sätt $\xi =$ antalet goda köttbitar per 4 dl soppa. Vi vet $\xi \sim Po(\lambda)$ med $\lambda = 4$, alltså gäller $P(\xi = k) = f_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, k = 0, 1, 2, ...$

   Alltså $P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi \leq 3) = 1 - [f_\xi(0) + f_\xi(1) + f_\xi(2) + f_\xi(3)]$

   $$= 1 - e^{-4}(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}) \approx 0.567$$

3. Uppgift 3.10 respektive 7.13 i kompendiet. Se kursmappen!

4. a) För $x \leq 0$ är $F(x) = 0$, för $x \geq a$ gäller $F(x) = 1$.

   För $0 \leq x \leq a : F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2}{a^2}(a - t)dt = \frac{2}{a^2}[-(a - t)^2 \frac{1}{2}]_0^x = 1 - \frac{(a-x)^2}{a^2}$

   b) $E(\xi) = \int_0^a xf(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (xa - x^2)dx = \frac{a}{3}$.

   $V(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$.

   $E(\xi^2) = \int_0^a x^2 f(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (x^2 a - x^3)dx = \frac{a^2}{6}$.

   Alltså $V(\xi) = \frac{a^2}{6} - (\frac{a}{3})^2 = \frac{a^2}{18}$.

   c) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - x) = 1 - \frac{x}{2}$. Vi får alltså $P(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \frac{x}{2})dx = \frac{5}{16}$.

5. Sätt $\xi =$ antalet gånger trean kommer upp.

   $\xi \sim Bin(10^4, \frac{1}{10}).P(\xi \leq 950) = \sum_{k=0}^{950} \binom{10^4}{k} (\frac{1}{10})^k (\frac{9}{10})^{10^4 - k}$

   $E(\xi) = np = 10^4 \cdot \frac{1}{10} = 1000$

   $V(\xi) = np(1 - p) = 900$

   Standardavvikelse för $\xi = \sqrt{900} = 30$. de Moivre-Laplace ger $\xi \sim^{approx} N(1000, 30)$.

   Vi får $P(\xi \leq 950) = P(z \leq \frac{950-1000}{30}) = P(z \leq -\frac{5}{3}) = 1 - P(z \leq \frac{5}{3}) = 1 - \Phi(1.67)$

   $$= 1 - 0.9525 = 0.0475$$