Grundkursen i sannolikhetslära 06.05.96, förslag till lösningar

1. Sätt $\xi =$ antalet försök som krävs.

   $P(\xi = 1) = \frac{1}{8}, P(\xi = 2) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}.$

   $P(\xi = 3) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$... osv.

   Allmänt : $P(\xi = K) = \frac{1}{8}, K = 1, 2, ...8.$

2. 3 valörer kan väljas bland 6 på $\binom{6}{3}$ olika sätt. Vi får då t.ex. värdena 2, 3, 6, vilket ger två gynnsamma utfall, nämligen (2, 3, 6) och (6, 3, 2).

   gynn $= \binom{6}{3} \cdot 2 = 40$

   tot $= 6^3 = 216$

   svar : $\frac{40}{216}$

3. $\int_0^1 f(x)dx = P(X > 0) = \frac{2}{3}, \int_{-1}^0 f(x)dx = P(X < 0) = \frac{1}{3}$

   varur genast följer $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ då $x \in [-1, 1], f(x) = 0$ för övriga $x \in \mathbf{R}$

   Vidare: $E(X) = \int_{-1}^1 x \cdot f(x)dx = \frac{2}{9}.$

   $V(X) = E(X^2) - E^2(X), E(X^2) = \int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}.$ Alltså $V(X) = \frac{23}{81}.$

5. $\xi \sim Po(1), f_\xi(K) = \frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda}$

   $P(\xi \leq 2) = f_\xi(0) + f_\xi(1) + f_\xi(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} = 0.9197$

   $\eta =$ antal försök (av 200) där $\xi \leq 2$

   $\eta \sim Bin(200, 0.9197)$

   Sökes $P(\eta > 180) = \sum_{k=181}^{200} \binom{200}{K} 0.9197^K \cdot 0.0803^{200-K}$

   Test: $np(1-p) = 200 \cdot 0.9197 \cdot 0.0803 = 14.77 > 5$

   Alltså $\eta \sim^{approx} N(np, \sqrt{np(1-p)})$

   $N(183.9, 3.8)$

   $P(\eta > 180) = P(\eta \geq 181) =^{KK} P(\eta \geq 180.5) = 1 - P(\eta \leq 180.5) = 1 - P(z \leq \frac{180.5-183.9}{3.8})$

   $1 - \Phi(-0.89) = 1 - (1 - \Phi(0.89)) = \Phi(0.89) = 0.81$