Grundkursen i sannolikhetslära 05.05.97, förslag till lösningar

2. Människa betecknas M, zorkit Z. Testet visar M, beteckas T_M, testet visar Z betecknas T_Z.

   $P(M|T_M) = \frac{P(M \cap T_M)}{P(T_M)} = \frac{P(M) \cdot P(T_M|M)}{[P(M) \cdot P(T_M|M) + P(Z) \cdot P(T_M|Z)]}$

   Insättes $P(M) = \frac{1}{10.000}, P(Z) = 1 - \frac{1}{10.000}, P(T_M|M) = 1 - P(T_Z|M)$

   $= 1 - 0.01 = 0.99, P(T_M|Z) = 0.01$, så fås

   $P(M|T_M) = \frac{99}{99+9999} = 0.0098$

3. $1 = \int_3^5 f(x)dx = a\int_3^5 (-x^2 + 8x - 15)dx = \frac{4}{3}a$, dvs $a = \frac{3}{4}$.

   $A =$ "ägget är ≥ 3.5"

   $P(A) = \int_{3.5}^5 f(x)dx = \frac{3}{4}\int_{3.5}^5 (-x^2 + 8x - 15)dx = \frac{27}{32}$.

   Sätt $\xi =$ antal ägg som är ≥ 3.5 (bland totalt 4 ägg).

   $P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - P(A^C)^4 = 1 - (\frac{5}{32})^4 \approx 0.9994$

4. $\xi =$ antalet russin per bulle. $\xi \sim Po(\lambda)$, där $\lambda = E(\xi)$ ska beräknas. Frekvensfunktionen f_ξ ges av $f_\xi(K) = \frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda}$. Vi kräver $P(\xi > 0) \geq 0,95$.

   $P(\xi > 0) \geq 0,95 \iff P(\xi = 0) < 0,05 \iff f_\xi(0) < 0,05 \iff e^{-\lambda} < 0,05$

   $\iff e^{\lambda} > 20 \iff \lambda \geq 3$

5. Sätt $\xi_A =$ antaler groddar av typ A, $\xi_B =$ antalet groddar av typ B.

   $\xi_A \sim Bin(500, 0.46), E(\xi_A) = 500 \cdot 0.46 = 230, V(\xi_A) = 500 \cdot 0.46 \cdot 0.54 = 124.2.$

   $\xi_B \sim Bin(500, 0.52), E(\xi_B) = 260, V(\xi_B) = 124.8.$

   ξ_A, ξ_B är approximativt normalfördelade (de M-L). Alltså är $\xi \equiv \xi_B - \xi_A$

   approximativt normalfördelad.

   $E(\xi) = E(\xi_B) - E(\xi_A) = 260 - 230 = 30$

   $V(\xi) = V(\xi_B) + V(-\xi_A) = V(\xi_B) + V(\xi_A) = 249$

   Alltså $\xi \sim^{approx} N(30, 15.78)$

   $P(\xi_A \geq \xi_B) = P(\xi \leq 0) = P(\frac{\xi - 30}{15.78} \leq \frac{0-30}{15.78}) = P(z \leq -\frac{30}{15.78})$

   $= \Phi(-1.90) = 1 - \Phi(1.90) = 0.029$