Grundkursen i sannolikhetslära 03.05.01, förslag till lösningar

1. Uppgift 1 är en direkt tillämpning av Sats 2.7.

2. Uppgift 2 är uppgift 7.11 och finns löst i kursmappen

3. A : "Expediten A betjänar" ; B : "Expediten B betjänar" ; C : "Expediten C betjänar".

   F = "Det går fel". Sökes att C expedierade givet det gick fel, dvs sökes $P(C|F)$.

   Vi använder Bayers sats.

$$P(C|F) = \frac{P(C \sqcap F)}{P(F)} = \frac{P(C) \cdot P(F|C)}{[P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) + P(C)P(F|C)]}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.03}{0.4 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03} = \frac{1}{3}$$

4. a) $x \leq 0 : F(x) = 0, x \geq a : F(x) = 1$

   $0 \leq x \leq a : F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2}{a^2}(a-t)dt = \frac{2}{a^2}[at - \frac{t^2}{2}]_0^x = -\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{2}{a}x$

   b) $E(\xi) = \int_0^a x \cdot f(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (xa - x^2)dx = \frac{a}{3}$

   $V(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$

   $E(\xi^2) = \int_0^a x^2 f(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (x^2a - x^3)dx = \frac{a^2}{6}$ Dvs $V(\xi) = \frac{a^2}{6} - (\frac{a}{3})^2 = \frac{a^2}{18}$

   c) $f(x) = \frac{1}{2}(2-x) = 1 - \frac{x}{2}$

   $P(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \frac{x}{2})dx = \frac{5}{16}$

5. ξ_i = antalet gånger åhörare nr i gäspar. $(i = 1, 2, ..., 100)$

   $\xi_i \sim Po(4), E(\xi_i) = V(\xi_i) = 4 (i = 1, 2, ..., 100)$

   $G = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{100}$ = totalantalet gäspningar.

   $E(G) = E(\xi_1 + ... + \xi_{100}) = E(\xi_1) + ... + E(\xi_{100}) = 400$

   $V(G) = V(\xi_1 + ... + \xi_{100}) =^{(*)} V(\xi_1) + ... + V(\xi_{100}) = 400$

   Standardavvikelse för $G = \sqrt{V(G)} = 20$. CGS ger $G \sim^{approx} N(400, 20)$

   (*) Ty åhörarna gäspar oberoende av varandra.

   $P(375 < G < 425) = P(376 \leq G \leq 424) =^{KK} P(375.5 \leq G \leq 424.5)$

   $= P(\frac{375.5-400}{20} \leq z \leq \frac{424.5-400}{20}) = P(-1.225 \leq z \leq 1.225)$

   $= \Phi(1.225) - \Phi(-1.225)$

   $= \Phi(1.225) - [1 - \Phi(1.225)] = 2 \cdot \Phi(1.225) - 1 = 0.7795.$

6. Se sats 4.14 och dess bevis