Grundkursen i sannolikhetslära 03.04.98, förslag till lösningar

3. Sätt ξ = antalet tryckfel per sida. $\xi \sim Po(1)$, det vill säga $f_\xi(k) = \frac{1}{e \cdot k!}, k = 0, 1, 2, ...$

   $P(\xi \geq 2) = 1 - [P(\xi = 0) + P(\xi = 1)] = 1 - [f_\xi(0) + f_\xi(1)] = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264$

4. Sätt η = vinsten per enhet. Vi har

$$\eta = \begin{cases} -4, \text{ om } \xi < a-1 \\ 1, \text{ om } a-1 \leq \xi \leq a+1 \\ 0, \text{ om } \xi > a+1 \end{cases}$$

   Alltså $E(\eta) = -4 \cdot P(\xi < a-1) + 1 \cdot P(a-1 \leq \xi \leq a+1) + 0 \cdot P(\xi > a+1)$.

   Sätt $A = P(\xi > a+1)$. Eftersom f_ξ är symmetrisk kring $x = a$ fås

   $E(\eta) = -4A + (1-2A) = 1 - 6A$, där $A = \int_{a+1}^{\infty} e^{-2|x-a|}dx =^{x>a} \int_{a+1}^{\infty} e^{-2(x-a)}dx =$

   $e^{2a}\int_{a+1}^{\infty} e^{-2x}dx = e^{2a}[-\frac{1}{2}e^{-2x}]_{a+1}^{\infty} = e^{2a} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2(a+1)} = \frac{1}{2} \cdot e^{-2}$.

   Nu följer $E(\eta) = 1 - 6A = 1 - 3e^{-2} \approx 0,59$.

5. Avrundningsfelet ξ är likformigt fördelat i (-0.5, 0,5). Det vill säga $f_\xi(x) = 1, x \in (-0.5, 0.5)$.

   $E(\xi) = \int_{-0.5}^{0.5} x \cdot 1dx = 0$. $E(\xi^2) = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 \cdot 1dx = \frac{1}{12}$. $V(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{1}{12}$.

   Låt ξ_i = avrundningsfelet vid i:te avrundningen. Sätt η = totala avrundningsfelet

   $= \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{108}$.

   De enskilda avrundningsfelen har antagits oberoende och lika fördelade. CGS ger att

   η är approximativt normalfördelad.

   $E(\eta) = E(\xi_1 + ... + \xi_{108}) = 108 \cdot E(\xi) = 0$

   $V(\eta) = 108 \cdot V(\eta) = 9$.

   Alltså $\eta \sim^{appr.} N(0, 3)$.

   $P(|\eta| \leq 6) = P(-6 \leq \eta \leq 6) =^{standardiserar\ \eta} P(\frac{-6-0}{3} \leq \frac{\eta - 0}{3} \leq \frac{6-0}{3})$

   $= P(-2 \leq z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0.954$.

   Svaret är $1 - P(|\eta| \leq 6)$, det vill säga ca. 0,05.