Grundkurs i analys, hemuppgifter till vecka 45

1. Verifiera att distributionslagen, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, gäller för alla komplexa tal $z_j = (x_j, y_j),\ j = 1, 2, 3$.

2. Skriv talet $(3+i)(4-3i)/(2+2i)$ på formen $a+ib$, där a och b är talets reella och imaginära delar.

3. Visa att för komplexa tal z_1, z_2 gäller: $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 = 0$ eller $z_2 = 0)$.

4. Visa att för bildning av konjugattal och belopp av komplexa tal gäller

$$(a)\quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\,, \qquad (b)\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,,\ \text{om } z_2 \neq 0\,.$$

5. Skriv talen a) $-1 + i\sqrt{3}$ och b) $(1-i)^{11}$ i formen $r\,e^{i\theta}$.

6. Lös ekvationen $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$.

7. Ange lösningarna till den komplexa ekvationen $(z-4)^4 = \sqrt{3} + i$ i trigonometrisk form, (dvs. med hjälp av sin och cos funktionerna).

8. Bestäm i komplexa talplanet alla rötter till ekvationen

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0\,.$$

   (Ledning: Introducera en falsk rot genom att multiplicera båda leden med faktorn $(1-z)$).