Grundkurs i analys I. 27.10.2006

1. Bestäm lösningarna till den komplexa ekvationen

$$(z+1)^4 + 1 = i$$

i trigonometrisk form.

2. Derivera funktionerna

$$\frac{\arctan(x^3)}{\sin(x^2)} \qquad \text{och} \qquad (1+x)^{1/x}.$$

3. För vilka värden på x konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$$

och vad är seriens summa då den är konvergent?

4. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2^{n+1}}{n^3+3} \right)^{(n+1)/(2n^2+1)}$$

med hjälp av standardgränsvärden.

5. Visa genom att undersöka derivatorna av en viss funktion att

$$\arcsin x + \sin x > 2x$$

för $0 < x \le 1$.

Facit: 1. $-1 + \sqrt[8]{2}\, i^n \left[\cos\frac{3\pi}{16} + i \sin\frac{3\pi}{16}\right]$ $(n = 0, 1, 2, 3)$

2. $\frac{3x^2}{1+(x^3)^2} \cdot \frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{2x \arctan(x^3) \cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$, $\quad \frac{(1+x)^{1/x}}{x}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right]$

3. konvergent för $x > -1/2$ med summan $\frac{x+1}{2x+1}$.

4. $\sqrt{2}$ (ledn: $\sqrt[n]{n} \to 1$, $n \to \infty$
$a_n \to a > 0$, $n \to \infty \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$)

Grundkurs i analys I. 27.10.2005

1. Lös ekvationen
$$^2\log(x+1) + {^2\log 3} \cdot {^3\log(x+2)} = \frac{1}{^3\log 2}.$$

2. Derivera funktionerna
$$\arctan\frac{1}{x} \cdot \tan(1+x^2) \qquad \text{och} \qquad (\arccos x)^x.$$

3. Räkna ut gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln x + \sqrt[3]{x}\cdot \sin x}{\sin^2 x + x\sqrt[3]{2x}}$$
med hjälp av standardgränsvärden.

4. Visa att funktionen
$$f(x) = \sqrt{x+x^2} - x, \quad x \geq 0,$$
är strängt växande och att den inversa funktionen f^{-1} är deriverbar för $x \overset{>}{\cancel{\geq}} 0$. Räkna speciellt ut derivatan $(Df^{-1})(\sqrt{2}-1)$ till f^{-1} i punkten $\sqrt{2}-1$.

5. Visa att
$$2\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \pi$$
för $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vad får man i högerledet i stället för π då $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| \leq 1$?

<u>Facit</u>: 1. $x = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

2. $-\dfrac{\tan(1+x^2)}{1+x^2} + \dfrac{2x\arctan\frac{1}{x}}{\cos^2(1+x^2)}$, $(\arccos x)^x \cdot \left[\ln(\arccos x) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4. $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

5. $\begin{cases} 4\arccos x & \text{för } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ 4\arccos x - 2\pi & \text{för } -1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Grundkurs i analys I. 28.10.2004

1. Lös ekvationen
$$\cos^2 x = \cos x + \sin^2 x\,.$$

2. Derivera funktionerna
$$\arcsin\left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \text{och} \quad \arctan\left((\tan x)^x\right)\,.$$

3. Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+n}{n^4+2n-1}\right)^{\frac{n^4+1}{2n+1}}.$$

4. Visa att
$$(x+1)\ln x > 2(x-1) \quad \text{för} \quad x>1\,.$$

(~~Antag att~~)
5. ~~Visa att~~ Den talföljd (a_n), som definieras av
$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{a_n}} \\ a_0 = 5\,, \end{cases}$$
är konvergent. ~~samt~~ Bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Facit: 1. $\begin{cases} x = n\cdot 2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{|x|\sqrt{x^2 - \sin^2 x}}, \quad \dfrac{(\tan x)^x}{1+(\tan x)^{2x}}\left(\ln(\tan x) + \dfrac{2x}{\sin(2x)}\right)$

3. $1/\sqrt{e}$

5. $\sqrt[3]{4}$

Grundkurs i analys I. 22.10.2003

1. Lös ekvationen

$$3^{2x} + 1 = 3\left(3^{x-1} + 1\right).$$

2. Derivera funktionerna

$$e^{(x^2)} \arctan(\ln x) \qquad \text{och} \qquad (\sin^2 x)^x.$$

3. Bestäm alla extremvärden till funktionen

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^{-x^2+4x}.$$

Har funktionen ett globalt maximum? Har den ett globalt minimum?

4. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+3n+1}\right)^{(n^2+1)/(2n^3+n+1)}.$$

5. Visa att

$$8\sqrt{x} - 3 > x(6-x) \qquad \text{för} \qquad x > 1.$$

<u>Facit</u>: 1. $x = {}^3\log 2$.

2. $e^{x^2}\left[2x\arctan(\ln x) + \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)}\right]$,

$2(\sin^2 x)^x \cdot \left[\ln|\sin x| + x \cdot \cot x\right]$

3. <u>Lokalt</u> och <u>globalt</u> max. e^3 för $x = 1$ och $x = 3$,

<u>   </u> " <u>   </u> min. 0 — " — $x = 2$.

4. 1

Grundkurs i analys I. 23.10.2002

1. Vilket är det minsta värde som funktionen

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

antar? Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = a$ för olika värden på a?

2. Derivera funktionerna

$$\ln x \cdot \cosh\frac{1}{x}, \quad \sin\frac{x}{x^2+1}, \quad \sqrt{\arctan(1-x^2)}\,.$$

3. Lös den komplexa ekvationen $1 + (z+2)^3 = 4(1+i)$ med hjälp av elementära funktioner.

4. Visa att den inversa funktionen f^{-1} till funktionen

$$f(x) = \frac{1 + 2(x+1)^{3/2}}{x+1}, \qquad x \geq 0\,,$$

existerar samt räkna ut derivatan $(Df^{-1})(\frac{17}{4})$.

5. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}\right)^{2\cot x}$$

med hjälp av välkända standardgränsvärden.

Facit: 1. Minsta värde (glob. min) är $\frac{1}{e^{2/e}}$ då $x = \frac{1}{e^2}$.

$$\begin{cases} 0 \text{ lösn. om } a < 1/e^{2/e} \\ 1 \text{ — " — } a = 1/e^{2/e} \text{ eller } a \geq 1 \\ 2 \text{ — " — } 1/e^{2/e} < a < 1. \end{cases}$$

2. $\frac{1}{x}\cosh\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln x \cdot \sinh\frac{1}{x}$, $\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $-\frac{x}{(2-2x^2+x^4)\sqrt{\arctan(1-x^2)}}$

3. $z = -2 + \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{4}{3}}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\frac{4}{3}}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right]$, $k = 0, 1, 2$.

4. $(f^{-1})'(\frac{17}{4}) = \frac{16}{7}$

5. e^2 (ledn: $(1+x)^{1/x} \to e$, då $x \to 0$)