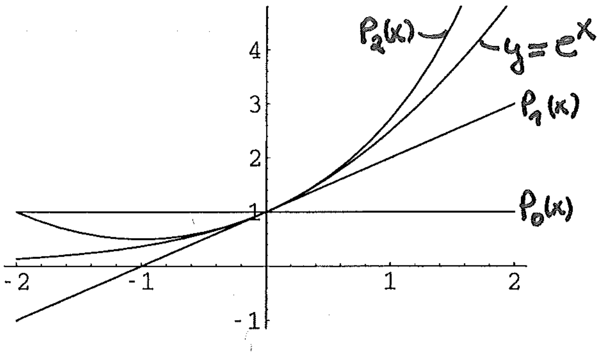
6 Serieutvecklingar

6.1 Taylors och Maclaurins formler

Polynom och rationella funktioner kan beräknas exakt för alla argumentvärden. De övriga elementära funktionerna e^x, x^α, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$, $\dots$. kan beräknas exakt endast i undantagsfall för speciella värden på argumentet. Vanligen får man nöja sig med närmevärden. Dessa kan erhållas genom att **approximera** en funktion $y = f(x)$ med polynom (eller rationella funktioner). Noggrant närmevärde kräver vanligen approximation av högt gradtal.

Exempel 6.1. Antag att vi vill approximera $y = f(x) = e^x$ med polynom i en liten omgivning av punkten $x = 0$. Vi har att $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, eftersom $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 0, 1, 2, \dots$.



$$\begin{cases} P_0(x) = f(0) = 1 \\ P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x \\ \quad = 1 + x \\ P_2(x) = f(0) + f'(0)x \\ \quad + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 \\ \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Antag att $f(x)$ och $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ är kontinuerliga i en omgivning av punkten $x = a$.

Problem: Sök ett polynom $P_n(x)$ av gradtal n sådant att

$$P_n(a) = f(a)\,,\; P_n'(a) = f'(a)\,,\; \dots\;,\; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,.$$

Vi gör ansatsen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

och bestämmer konstanterna $a_0,\ a_1,\ \ldots\ , a_n$. Då märker vi att (kolla detta!)

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Polynomet

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n \quad (6.1)$$

kallas **Taylorpolynomet** av ordning n kring $x = a$ för funktionen $f(x)$.

Speciellt om $a = 0$ får vi **Maclaurinpolynomet** av ordning n för funktionen $f(x)$,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n. \qquad (6.2)$$

Då en funktion $f(x)$ approximeras i en punkt $x = a$ med sitt Taylorpolynom kan felet i en omgivning av $x = a$ uttryckas med hjälp av **Lagranges restterm** $R_n(x)$. Vi har nämligen:

Sats 6.1. **(Taylors formel.)** Antag att $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerliga funktioner i en omgivning av a, alltså för $|x-a| \leq d$, för något $d > 0$. Då gäller

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x), \qquad (6.3)$$

där Lagranges restterm ges av

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in [a, x]. \qquad (6.4)$$

Vi säger att vi har **Taylorutvecklat** funktionen $f(x)$ kring punkten a. Om vi väljer $a = 0$ utför vi **Maclaurinutveckling** av $f(x)$.

I fortsättningen behandlar vi Maclaurinutveckling, dvs. $a = 0$. Om vi vill Taylorutveckla $f(x)$ kring $x = a$, kan vi Maclaurinutveckla funktionen

$$g(x) = f(x+a)$$

och byta x mot $x - a$ i den erhållna Maclaurinutvecklingen.

Sats 6.2. **(Maclaurins formel.)** Antag att $f(x), f'(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerliga funktioner i en omgivning av 0, alltså för $|x| \leq d$, för något $d > 0$. Då gäller

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x)\,, \tag{6.5}$$

där Lagranges restterm ges av

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,, \quad \xi \in [0, x]\,. \tag{6.6}$$

Resttermen $R_n(x)$ anger **felet i approximationen**,

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x)\,. \tag{6.7}$$

Bevis av Sats 6.2. Vi fixerar ett x sådant att $0 \leq x \leq d$, (analogt bevis för $-d \leq x \leq 0$), och skriver

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt\,. \tag{6.8}$$

Därefter utför vi partiell integration i (6.8),

$$f(x) = f(0) + \Big[(t+C)\,f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x (t+C)\,f''(t)\,dt\,.$$

Nu väljs integrationskonstanten $C = -x$, (vi har ju ett fixt x), och vi får

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \int_0^x (x-t)\,f''(t)\,dt\,.$$

Om vi fortsätter att integrera partiellt n gånger får vi (kolla!):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Definiera nu funktionen $g(t)$ genom

$$g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\,.$$

Då är $g(t) \geq 0$ i intervallet $[0, x]$ och med stöd av Sats 5.6 (generaliserade medelvärdessatsen) får vi att det existerar ett $\xi \in [0, x]$ sådant att

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^x g(t)\, f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x g(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi) \left[\frac{(x-t)^{n+1}(-1)}{n!\,(n+1)} \right]_0^x \\ &= f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} . \quad \square \end{aligned}$$

Vi kan nu omskriva resttermen $R_n(x)$ med hjälp av en funktion $H(x)$,

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = H(x)\,x^{n+1} ,$$

där

$$H(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} . \tag{6.9}$$

Då $f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerlig för $x \in [-d, d]$ får vi att $H(x)$ är **begränsad** i $[-d, d]$. Vi får då följande sats:

Sats 6.3. Antag att $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerliga funktioner i en omgivning av 0, alltså för $|x| \leq d$, för något $d > 0$. Då gäller

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = H(x) \cdot x^{n+1} , \tag{6.10}$$

där funktionen $H(x)$ är **begränsad** i en omgivning $|x| \leq d$ av 0.

Man kan visa följande **entydighetssats** för Maclaurinutvecklingen:

Sats 6.4. Antag att $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerliga funktioner i en omgivning av 0, alltså för $|x| \leq d$, för något $d > 0$, och att

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^{n+1}\,H(x) = p(x) + x^{n+1}\,H(x) ,$$

där $H(x)$ är begränsad i en omgivning $|x| \leq d$ av $x = 0$. Då är $p(x)$ identiskt lika med Maclaurinpolynomet $P_n(x)$, alltså gäller det att

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} , \qquad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Exempel 6.2. Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 2 till $f(x) = e^{-x^2}$.

6.2 Maclaurinutveckling av några standardfunktioner

Vi härleder sex Maclaurinutvecklingar som bör memoreras.

1. För $f(x) = e^x$ har vi att $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Då koefficienten a_k för termen $a_k x^k$ i Maclaurinpolynomet ges av $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, erhåller vi Maclaurinutvecklingen för exponentialfunktionen,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)\,. \tag{6.11}$$

Vidare har vi att

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.12}$$

2. För funktionen $f(x) = \sin x$ är det enkelt att verifiera att $f^{(2n)}(0) = 0$ och $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Då får vi Maclaurinutvecklingen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)\,, \tag{6.13}$$

där

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} = 0 \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.14}$$

3. För $f(x) = \cos x$ har vi att $f^{(2n+1)}(0) = 0$ och $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Därmed erhålls Maclaurinutvecklingen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)\,, \tag{6.15}$$

där

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = 0 \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.16}$$

4. För $f(x) = \ln(1+x)$ visar man lätt att $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Vi får då Maclaurinutvecklingen

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)\,. \tag{6.17}$$

Man kan visa att

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{för} \quad -1 < x \leq 1\,. \tag{6.18}$$

5. Då $f(x) = (1+x)^a$, där $a \in \mathbb{R}$, gäller $f^{(n)}(0) = a\,(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)$. Vi får Maclaurinutvecklingen

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a\,(a-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{a\,(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}\,x^n + R_n(x)\,. \tag{6.19}$$

Man kan visa att

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{för} \quad -1 < x < 1\,. \tag{6.20}$$

6. Betrakta nu funktionen $f(x) = \arctan x$. För $x \neq 1$ har vi den geometriska summan

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Om vi i denna formel insätter $x = -t^2$ får vi:

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n\,t^{2n} = \frac{1 - (-1)^{n+1}\,t^{2n+2}}{1+t^2}\,,$$

vilket ger oss formeln

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n\,t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}\,t^{2n+2}}{1+t^2}\,. \tag{6.21}$$

Om vi integrerar båda leden i (6.21) över intervallet $[0, x]$ erhålls

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\arctan x = P_{2n+1}(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\,.$$

Nu kan man visa att det finns en funktion $H(x)$ begränsad i en omgivning av $x = 0$ sådan att i en omgivning av 0 gäller

$$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt = x^{2n+3}\, H(x)\,.$$

Men då ger ju entydighetssatsen, Sats 6.4, att $P_{2n+1}(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning $2n+1$ till $\arctan x$ och vi får

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x)\,, \tag{6.22}$$

där man kan visa att

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = 0 \quad \text{för } -1 \le x \le 1\,. \tag{6.23}$$

Exempel 6.3. Utveckla funktionen $\sin x^2$ i Maclaurinserie.
Lösning: Med hjälp av funktionen $H(t)$ begränsad i en omgivning av $t = 0$ kan vi skriva

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + t^{2n+1}\, H(t)\,.$$

Om vi sätter $t = x^2$ erhålls

$$\begin{aligned}\sin x^2 &= x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} + (x^2)^{2n+1}\, H(x^2)\\ &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + x^{4n+2}\, G(x)\,,\end{aligned}$$

där $H(x)$ och $G(x)$ är begränsade i en omgivning av $x = 0$.

Exempel 6.4. Beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = e^{\sin x}$.

6.3 Beräkning av gränsvärden

En viktig tillämpning av Maclaurinutveckling är att beräkna gränsvärden. Vi belyser metodiken med hjälp av några exempel.

Exempel 6.5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \arctan x}\,.$$

Lösning: Vi har följande utvecklingar

$$\begin{aligned}
\arctan x &= x - x^3\, H_1(x)\,,\\
x \arctan x &= x^2 - x^4\, H_1(x)\,,\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3\, H_2(x)\,,\\
\sin x &= x - x^3\, H_3(x)\,,
\end{aligned}$$

där $H_1(x)$, $H_2(x)$ och $H_3(x)$ är begränsade i en omgivning av $x = 0$. Vi undersöker kvoten

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - \sin x}{x \arctan x} &= \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3\, H_2(x)) - 1 - (x - x^3\, H_3(x))}{x^2 - x^4\, H_1(x)}\\
&= \frac{\frac{x^2}{2} + x^3\, H_4(x)}{x^2 - x^4\, H_1(x)} = \frac{\frac{1}{2} + x\, H_4(x)}{1 - x^2\, H_1(x)} \quad (H_4(x) = H_2(x) - H_3(x))\\
&\longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{då } x \to 0\,.
\end{aligned}$$

Exempel 6.6. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\,.$$

Exempel 6.7. Visa att man kan bestämma a och b så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + a \sin x + b}{\ln(\cos x) + x^2}$$

existerar. Ange a och b, samt bestäm gränsvärdet.

Exempel 6.8. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^4} - 1}}{x^2}\,.$$

l'Hospitals regel

Antag att $f(0) = g(0) = 0$, att $f''(x)$ och $g''(x)$ är kontinuerliga i en omgivning av $x = 0$, samt att $g'(0) \neq 0$. Då fås med hjälp av Maclaurinutveckling att

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)\,x + x^2\,H_1(x)}{g(0) + g'(0)\,x + x^2\,H_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(0) + x\,H_1(x)}{g'(0) + x\,H_2(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Detta kallas l'Hospitals regel. Om nu $f'(0) = g'(0) = 0$, men $g''(0) \neq 0$ och $f'''(x)$ och $g'''(x)$ är kontinuerliga i en omgivning av 0 kan man tillämpa regeln på kvoten $f'(x)/g'(x)$ och får:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Exempel 6.9. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}.$$

Lösning: Förutsättningarna för att tillämpa l'Hospitals regel två gånger är uppfyllda och vi erhåller:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cosh x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Fastän l'Hospitals regel i många fall är bekväm att använda, behöver den inte alltid leda till enklare gränsvärdesbestämningar. Ett försök att tillämpa regeln på gränsvärdet i Exempel 6.8 belyser detta sakförhållande!